Coloração total em grafos grades parciais

Lucas Magalhães Domingues[a,b], Sheila Morais de Almeida[a]

[a] *Departamento Acadêmico de Informática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Rua Doutor Washington Subtil Chueire, 330, Ponta Grossa, PR*
[b] *Autor para correspondência: lucdom@alunos.utfpr.edu.br*

Palavras-chaves: coloração total, grafo grade parcial, grafo bipartido

Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo simples com conjunto de *vértices* $V(G)$ e conjunto de arestas $E(G)$, onde cada *aresta* é um par não-ordenado de vértices. Os vértices e arestas de G são chamados de *elementos* de G. Uma *coloração total* de um grafo G é uma atribuição de cores para os elementos de G. Uma coloração total é *própria*, quando quaisquer dois elementos adjacentes ou incidentes possuem cores distintas. Toda coloração total deste projeto é própria e, de agora em diante, o termo "própria" será omitido. O *Problema da Coloração Total* é dado um grafo G, determinar $\chi''(G)$, o menor número de cores para uma coloração total de G, chamado de *número cromático total* de G. Decidir, dado um grafo G e um inteiro k, se G tem uma coloração total com k cores é um problema NP-completo, mesmo quando restrito aos grafos bipartidos k-regulares com $k \geq 3$ fixo (McDiarmid e Sánchez-Arroyo, *Total colouring regular bipartite graphs is NP-hard* , 1994). Uma *grade* $G_{m\times n}$ é um grafo simples com conjunto de vértices $V(G_{m\times n}) = \{v_{i,j} : 1 \leq i \leq m \;\wedge\; 1 \leq j \leq n\}$ e conjunto de arestas $E(G) = \{v_{i,j}v_{k,\ell} : 1 \leq i,k \leq m \;\wedge\; 1 \leq j,\ell \leq n \;\wedge\; [(i = k \;\wedge\; \ell = j+1) \;\vee\; (k = i+1 \;\wedge\; j = \ell)]\}$. Um grafo é uma *grade parcial* quando é um subgrafo de uma grade $G_{m\times n}$.

O Problema da Coloração Total e sua complexidade computacional são questões em aberto para as grades parciais. Apesar disso, há algoritmo polinomial para subconjuntos de grades parciais, como apresentado a seguir. O grau máximo de um grafo G, $\Delta(G)$, é o maior número de arestas em um mesmo vértice de G. Seja G uma grade parcial. Se $\Delta(G) = 0$, então G é o grafo trivial e $\chi''(G) = \Delta(G)+1$. Se $\Delta(G) = 1$, então $\chi''(G) = \Delta(G)+2$. Se $\Delta(G) = 2$, então G é um caminho com $n \geq 3$ ou é um ciclo; se for um caminho, $\chi''(G) = \Delta(G)+1$; se for um ciclo, $\chi''(G) = \Delta(G)+1$ quando $n \equiv 0 \pmod 3$, e $\chi''(G) = \Delta(G)+2$, caso contrário (Yap, *Total colourings of graphs*, 1996). Se $\Delta(G) = 4$, então $\chi''(G) = \Delta(G)+1$, pois G é subgrafo com o mesmo grau máximo que uma grade $G_{m\times n}$ com $m, n > 2$ e $\chi''(G_{m\times n}) = \Delta(G_{m\times n})+1$ (Campos, *O problema da coloração total em classes de grafos*, 2006). Portanto, o único caso em aberto é quando $\Delta(G) = 3$. Nesses casos, o número cromático total é conhecido quando o tamanho do maior ciclo induzido é 4, quando a grade parcial é uma árvore, e quando existem no máximo três vértices com grau igual a 3 (Campos, *O problema da coloração total em classes de grafos*, 2006). Então, neste projeto pretende-se determinar o número cromático total dos grafos grades parciais com grau máximo igual a 3 nos casos em aberto.

ISSN:2526-1371 DOI 10.5281/zenodo.15014707