Coloração total distinta na vizinhança em potências de caminhos

Pedro Henrique Salgado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Av. Monteiro Lobato km 04
Ponta Grossa, Brasil
pedrosalgado@alunos.utfpr.edu.br

Mayara Midori Omai*
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Av. Monteiro Lobato km 04
Ponta Grossa, Brasil
omai@alunos.utfpr.edu.br

Sheila Morais de Almeida
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Av. Monteiro Lobato km 04
Ponta Grossa, Brasil
sheilaalmeida@utfpr.edu.br

RESUMO

Uma coloração total própria de um grafo é uma atribuição de cores para seus vértices e arestas de forma que elementos adjacentes recebam cores distintas. Dada uma coloração total própria em um grafo G, $C(v)$ é o conjunto de cores de um vértice v, composto pelas cores das arestas que incidem em v e pela a cor do próprio v. Uma coloração total distinta na vizinhança é uma coloração total própria em que $C(u) \neq C(v)$ para todo par de vértices adjacentes u e v. O Problema da Coloração Total Distinta na Vizinhança consiste em determinar o menor número de cores necessário para se obter uma coloração total distinta na vizinhança de um grafo. Este trabalho apresenta a solução do Problema da Coloração Total Distinta na Vizinhança para as potências de caminhos P_n^k com $n > 2k + 1$.

Palavras-chave

Coloração total distinta na vizinhança; Grafos indiferença; Potências de caminhos

ABSTRACT

A proper total coloring of a graph is an assignment of colors to the vertices and edges such that adjacent elements receive distinct colors. The set of colors of a vertex v, denoted by $C(v)$, is composed by the colors of the edges incident to v and the color of v. An adjacent vertex distinguishing total coloring is a proper total coloring such that $C(u) \neq C(v)$ for every pair of adjacent vertices u and v. The Adjacent Vertex Distinguishing Total Coloring Problem consists of determining the minimum number of colors to an adjacent vertex distinguishing total coloring of a graph. This work presents the solution of the Adjacent Vertex Distinguishing Total Coloring Problem for the powers of paths P_n^k with $n > 2k + 1$.

*Bolsista da Fundação Araucária

WPCCG '17 Outubro, 2017, Ponta Grossa, Paraná, Brasil
.

Keywords

Adjacent vertex distinguishing total coloring; Indifference graphs; Powers of paths

1. INTRODUÇÃO

Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo com conjunto de vértices $V(G)$ e conjunto de arestas $E(G)$. Dois elementos do conjunto $V(G) \cup E(G)$ são *adjacentes* se são dois vértices que formam uma aresta, duas arestas que compartilham o mesmo vértice, ou uma aresta e um dos vértices em que ela incide.

Os problemas de coloração consistem originalmente em determinar o menor número de cores necessário para colorir os elementos de um grafo, de forma que elementos adjacentes tenham cores distintas. Dado um grafo G, uma *coloração total própria* consiste na atribuição de cores para os elementos do conjunto $V(G) \cup E(G)$, de forma que elementos adjacentes recebam cores distintas. Dada uma coloração total própria para um grafo G, $C(v)$ é o conjunto de cores do vértice v, composto pelas cores das arestas que incidem em v e pela a cor do próprio v. Uma *coloração total distinta na vizinhança*(ou coloração TDV) é uma coloração total própria em que $C(u) \neq C(v)$ para todo par de vértices adjacentes u e v. O *Problema da Coloração Total Distinta na Vizinhança*, introduzido por Zhang et al. [5] em 2005, consiste em determinar o menor número de cores necessário para se obter uma coloração TDV de um grafo. Tal número é conhecido como *número cromático total distinto na vizinhança* e é denotado por $\chi''_a(G)$. A Figura 1 apresenta um exemplo de coloração TDV para um grafo completo com cinco vértices. Um grafo é *completo* quando existe aresta entre todo par de vértices. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n.

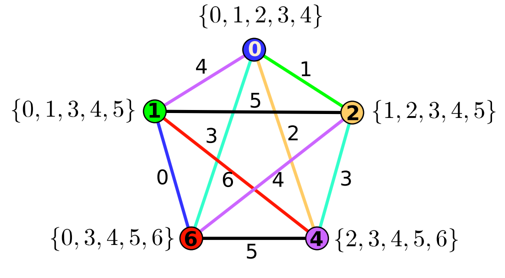

Figura 1: Coloração total distinta na vizinhança de um K_5

ISSN: 2526-1371

Neste trabalho apresentamos uma solução parcial do Problema da Coloração TDV para as potências de caminhos. Uma *potência de caminho*, P_n^k, é um grafo no qual $V(P_n^k) = \{v_0, v_1, ..., v_{n-1}\}$ e existe aresta v_iv_j se, e somente se, $|j-i| \leq k$. Um exemplo é a potência P_6^3, apresentada na Figura 2.

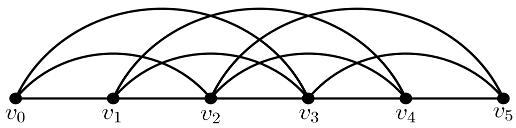

Figura 2: Grafo P_6^3

Seja $\Delta(G)$ o maior grau de um vértice no grafo G. Ao introduzir o Problema da Coloração TDV, Zhang et al. [5] estabeleceram a seguinte conjectura.

Conjectura 1. *[5] Seja G um grafo conexo com pelo menos dois vértices, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 3$.*

Uma *clique* é um conjunto de vértices em que todos os vértices são adjacentes. Um grafo é *indiferença* quando seu conjunto de vértices pode ser linearmente ordenado de forma que vértices que pertencem à mesma clique sejam consecutivos nesta ordem. Tal ordem é chamada *ordem indiferença* [4]. As potências de caminhos são uma subclasse dos grafos indiferença.

Pedrotti e Mello [3] provaram que a Conjectura 1 é verdadeira para os grafos indiferença. Além disso, provaram que para um grafo indiferença G com $\Delta(G)$ ímpar e vértices adjacentes de grau máximo, $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$. Quando $\Delta(G)$ é par e não existem vértices adjacentes de grau máximo, Pedrotti e Mello [3] provaram que $\chi''_a(G) = \Delta(G)+1$. Consequentemente, o Problema da Coloração TDV em potências de caminhos permanece em aberto para os casos em que $\Delta(P_n^k)$ é ímpar e não existem vértices adjacentes de grau máximo e quando $\Delta(P_n^k)$ é par e existem vértices adjacentes de grau máximo. Esse artigo apresenta uma solução ótima para todo P_n^k com $n > 2k+1$, um caso em que $\Delta(P_n^k)$ é par e existem vértices adjacentes de grau máximo.

2. RESULTADOS CONHECIDOS

Nesta seção apresentamos os principais resultados conhecidos para o Problema da Coloração TDV.

Quando Zhang et al. [5] definiram a coloração TDV, apresentaram os primeiros resultados sobre o número cromático total distinto na vizinhança, descritos a seguir.

Teorema 2. *[5] Se G é um grafo com vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi''_a(G) \geq \Delta(G) + 2$.*

O Teorema 2 é bastante intuitivo, já que por definição $\chi''_a(G) \geq \Delta + 1$ e, quando existem vértices adjacentes de grau máximo, $\Delta + 1$ cores não são suficientes para que seus conjuntos de cores sejam distintos.

Para os grafos completos K_n, $\chi''_a(K_n)$ também é conhecido, conforme o teorema a seguir.

Teorema 3. *[5] Se K_n é um grafo completo com $n > 1$ vértices, então*

$$\chi''_a(K_n) = \begin{cases} \Delta(K_n) + 2, & \textit{se } n \textit{ é par}, \\ \Delta(K_n) + 3, & \textit{se } n \textit{ é ímpar}. \end{cases}$$

Um grafo é um caminho se é uma potência de caminho P_n^1. Comumente, denota-se a potência de caminho P_n^1 por P_n. Para caminhos, rege o seguinte Teorema 4.

Teorema 4. *[5] Se P_n é um caminho com $n \geq 2$ vértices, então,*

$$\chi''_a(P_n) = \begin{cases} 3, & \textit{se } n \in \{2,3\}; \\ 4, & \textit{se } n \geq 4. \end{cases}$$

Um *ciclo* é um grafo conexo em que todos os vértices tem grau 2. Um ciclo com n vértices é denotado por C_n. Para os ciclos, $\chi''_a(C_n)$ é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 5. *[5] Se C_n é um ciclo com $n \geq 4$ vértices, então $\chi''_a(C_n) = 4$.*

Uma *árvore* é um grafo conexo que não possuiu um ciclo como subgrafo. Para árvores, Zhang et al. [5] apresentam o seguinte resultado.

Teorema 6. *[5] Se T_n é uma árvore com $n \geq 2$, então, $\chi''_a(T_n) = \Delta(T) + 2$ quando existem vértices adjacentes de grau máximo e $\chi''_a(T_n) = \Delta(T) + 1$, caso contrário.*

Um grafo é *bipartido* se podemos particionar os seus vértices em dois conjuntos A e B de forma que não existam arestas entre elementos que pertencem ao mesmo conjunto. Um grafo é *bipartido completo* se é um grafo bipartido em que vértices pertecentes a conjuntos diferentes da partição são adjacentes. Um grafo bipartido completo com partição $[A, B]$, $|A| = a$ e $|B| = b$, é denotado por $K_{a,b}$.

Teorema 7. *[5] Seja $K_{a,b}$ um grafo bipartido completo, com $a \geq b \geq 1$. Então,*

$$\chi''_a(K_{a,b}) = \begin{cases} 3, & \textit{se } a = b = 1, \\ a+1, & \textit{se } a \geq b+1, \\ a+2, & \textit{se } a = b \geq 2. \end{cases}$$

Em 2008, Chen [1] apresentou um limitante superior para o número cromático total distinto na vizinhança dos grafos com $\Delta(G) = 3$, como mostra o seguinte teorema.

Teorema 8. *[1] Se G é um grafo com $\Delta(G) = 3$, então $\chi''_a(G) \leq 6$.*

Pedrotti e Mello [3] apresentaram os seguites resultados sobre o Problema da Coloração TDV em grafos indiferença.

Teorema 9. *[3] Se G é um grafo indiferença com $\Delta(G)$ par sem vértices adjacentes de grau máximo, então, $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 1$.*

Teorema 10. *[3] Seja G um grafo indiferença com $\Delta(G)$ ímpar. Então, G tem uma coloração TDV com $\Delta(G) + 2$ cores e, se G possui vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$.*

Para o desenvolvimento desse trabalho, será necessário o seguinte resultado sobre coloração total em grafos completos.

Teorema 11. *Se K_n é um grafo completo com n vértices, então*

$$\chi''(K_n) = \begin{cases} \Delta(K_n) + 2, & \textit{se } n \textit{ é par}, \\ \Delta(K_n) + 1, & \textit{se } n \textit{ é ímpar}. \end{cases}$$

3. RESULTADOS

Esta seção apresenta os resultados parciais sobre o Problema da Coloração TDV em potências de caminhos. Para compreender tais resultados algumas definições são necessário. Estas são apresentadas a seguir.

PROPOSIÇÃO 12. *Se P_n^k é uma potência de caminho com $1 < n \neq 2k+1$, então existem vértices adjacentes de grau máximo.*

PROVA. Se $n > 2k+1$, então $\Delta(P_n^k) = 2k$ e os vértices $v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{n-k-1}$ são vértices consecutivos de grau máximo, então, existem $(n-k-1)-(k)+1 = n-2k$ vértices com grau $\Delta(P_n^k)$. Como $n > 2k+1$, o número de $\Delta(P_n^k)$-vértices é $n-2k \geq 2k+2-2k = 2$.

Se $n < 2k+1$, então $\Delta(P_n^k) < 2k$ e P_n^k possui vértice universal. Logo, $\Delta(P_n^k) = n-1$. Se $n \leq k+1$, então P_n^k é um grafo completo e, portanto, possui vértices de grau máximo adjacentes. Se $n > k+1$, então os graus dos vértices na ordem indiferença são $k, k+1, \ldots, n-2, n-1, \ldots, n-1, n-2, n-3, \ldots, k$, respectivamente. Observe que existem exatamente dois vértices com cada grau menor que $n-1$. Então, existem $2(n-2-k+1) = 2n-4-2k+2 = 2n-2k-2$ vértices com grau menor que $n-1$. Logo, o número de vértices com grau máximo é $n-(2n-2k-2) = n-2n+2k+2 = 2k-n+2$. Como $n < 2k+1$, então existem $2k-(2k)+2 = 2$ vértices adjacentes de grau máximo. $\square$

A *vizinhança aberta* de um vértice v é o conjunto dos vértices que são adjacentes a v e é denotada por $N(v)$. Uma função é *injetora* quando para todo par de elementos u e v do domínio da função, se $u \neq v$, então $f(u) \neq f(v)$. Ou seja, cada elemento da imagem corresponde a exatamente um elemento do domínio.

Um *pullback* de um grafo H para um grafo G, consiste em uma função $f : V(H) \to V(G)$, de modo que se $uv \in E(H)$, então $f(u)f(v) \in E(G)$ e f é injetora quando restrita à $N(v)$. Em um artigo de 1999, Figueiredo, Meidanis e Mello [2] introduziram as funções *pullback*, mostrando que, se existe um *pullback* f de um grafo G_1 em um grafo G_2 e se G_2 possui uma coloração total com t cores, então G_1 também possui uma coloração total com t cores. A Figura 3 mostra um grafo G_2 com uma coloração total própria $\tau : V(G_2) \cup E(G_2) \to \{0,1,2,3,4\}$. Para obter-se uma coloração total própria $\alpha : V(G_1) \cup E(G_1) \to \{0,1,2,3,4\}$, uma função *pullback* $f : V(G_1) \to V(G_2)$ atribui a cada vértice de G_1 o rótulo de um vértice de G_2. Então, α é definida por $\alpha(v_i) = \tau(v_i)$ e $\alpha(v_iv_j) = \tau(v_iv_j)$, $0 \leq i,j \leq 3$. Observe que α é uma função composta $f \circ \tau$ que resulta em uma coloração total com $\Delta(G_1)+2$ cores para G_1.

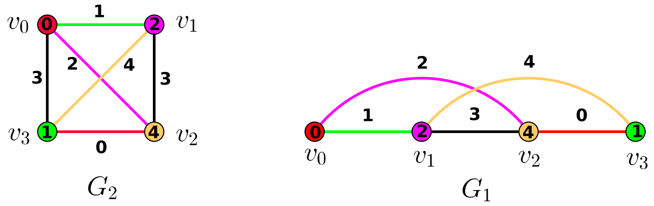

Figura 3: Coloração total G_1 atráves de um pullback do G_1 para o G_2

Nesse trabalho, consideramos uma potência de caminho P_n^k com $n > 2k+1$. Neste caso, $\Delta(P_n^k) = 2k$. Vamos mostrar que esses grafos tem uma coloração TDV com $2k+2$ cores. Para tanto, realizamos um *pullback* $f : V(P_n^k) \to K_{2k+2}$. Entretanto, pelo Teorema 11 não existe coloração total própria para o grafo K_{2k+2} com $2k+2$ cores. Mesmo assim, consideramos uma coloração total não-própria τ de um grafo completo K_{2k+2} e provamos que $f \circ \tau$ é coloração total própria e distinta vizinhança para o grafo P_n^k. Isso prova que o número cromático total distinto na vizinhança do P_n^k, quando $n > 2k+1$, é exatamente $2k+2$.

TEOREMA 13. *Seja P_n^k uma potência de caminho com $n > 2k+1$, então $\chi_a''(P_n^k) = \Delta(P_n^k)+2$.*

PROVA. Considere uma potência de caminho com $n > 2k+1$ e vértices rotulados $v_0v_1 \ldots v_{n-1}$ de acordo com uma ordem indiferença. Como $n > 2k+1$, pela Proposição 12, $\Delta(P_n^k) = 2k$ é par e o grafo possui vértices adjacentes de grau máximo. Portanto, $\chi_a''(P_n^k) \geq \Delta(P_n^k)+2$ pelo Teorema 2. Rotule os vértices do grafo $K_{2k+2}, u_0, u_1, \ldots, u_{2k+1}$. Seja $f : V(P_n^k) \to V(K_{2k+2})$, tal que $f(v_i) = u_{i \pmod{2k+2}}$. Considere a coloração total não-própria do grafo K_{2k+2} dada pela função $\tau : V(K_{2k+2}) \cup E(K_{2k+2}) \to \{0,1,\ldots,2k+1\}$, apresentada a seguir.

$$\begin{array}{l} \tau(v_i) = 2i \pmod{2k+2}, \\ \tau(v_iv_j) = (i+j) \pmod{2k+2}. \end{array} .$$

Seja $\alpha : V(P_n^k) \cup E(P_n^k) \to \{0,1,\ldots,2k+1\}$, uma coloração total do P_n^k tal que $\alpha = f \circ \tau$.

Pela definição de α, nenhum vértice v_i do grafo P_n^k é adjacente a dois vértices v_j e v_p tal que $j \equiv p \pmod{2k+2}$, caso contrário $\Delta(P_n^k) > 2k$. Portanto, não existem arestas com a mesma cor que incidem no mesmo vértice. Também não existem no P_n^k vértices adjacentes v_i e v_j tal que $\alpha(v_i) = \alpha(v_iv_j)$, caso contrário, $2i \equiv (i+j) \pmod{2k+2}$ e a distância entre v_i e v_j é maior que $2k$. Suponha, por contradição, que existem dois vértices adjacentes, v_i e v_j, tais que $\alpha(v_i) = \alpha(v_j)$. Sem perda de generalidade, considere que $i < j$. Lembre-se que $2i \equiv 2j \pmod{2k+2}$. Como $i < j$, então $2j - 2i \geq 2k+2$. Logo, $j - i \geq k+1$, um absurdo, já que v_i e v_j são adjacentes e estão a uma distância maior que k no P_n^k. Dessa forma, α é uma coloração total própria do P_n^k.

Para garantir que α é uma coloração TDV, vamos provar que em cada vértice v_i do grafo P_n^k, existe uma cor c tal que $c \notin C(v_i)$ e $c \in C(v_j)$, para cada par de vértices adjacentes v_i e v_j, $j > i$. Seja v_i um vértice do P_n^k e $v_j = v_{i+k}$, o vértice adjacente a v_i que está mais a direita na ordem indiferença. Note que, por construção, v_i não é adjacente a $v_{j+1} = v_{i+k+1}$.

Pela função α, a cor $c = (i+j+1) \pmod{2k+2}$ aparece somente nas arestas v_iv_q, em que $q = j+1+x(2k+2)$, $x \in \mathbb{Z}$. Portanto, todo $v_q \notin N(v_i)$ e $c \notin C(v_i)$. Além disso, vamos mostrar que $\alpha(v_i) \neq c$. Suponha por contradição que $\alpha(v_i) = c = \alpha(v_iv_{j+1})$. Então, $2i \equiv (i+j+1) \pmod{2k+2}$. Como $i < j+1$, $2i + x(2k+2) = j+1$ para algum $x \in \mathbb{Z}$, $x \geq 1$, então, $j - i \geq \Delta(P_n^k)+1 = 2k+1$, um absurdo já que a distância entre v_i e v_j é no máximo k. Portanto, $\alpha(v_i) \neq c = \alpha(v_iv_{j+1})$.

Agora vamos mostrar que a cor c incide em todos os vértices de v_{i+1} a v_j. Pela função α, $c = \alpha(v_iv_{j+1}) = \alpha(v_{i+m}, v_{j+1-m})$, para $1 \leq m < \frac{(j-i+1)}{2}$. Além disso, se o número de vértices de $v_i + 1$ até v_j é ímpar, então o vértice $v_{\frac{j+i+1}{2}}$ tem cor c. Dessa forma, a cor c incide em todos os vértices entre v_{i+1} e v_j.

Portanto, a coloração α é uma coloração TDV, utilizando $\chi''_a(G) = \Delta(P_n^k) + 2$ cores. $\square$

Um exemplo de coloração TDV de um P_{11}^3 é apresentado na Figura 4.

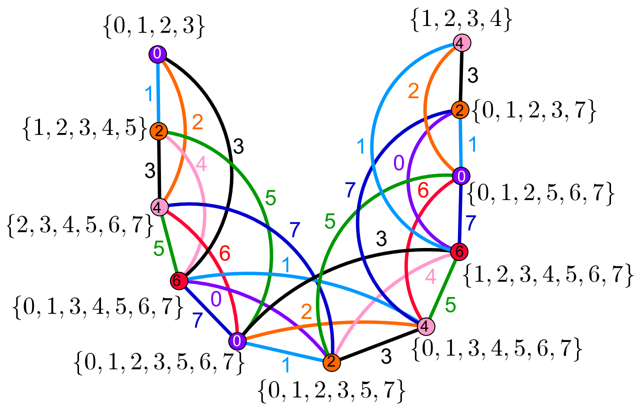

Figura 4: Coloração total distinta na vizinhança de um P_{11}^3

4. CONCLUSÃO

Se a potência de caminho tem $n \leq k+1$, então o P_n^k é um grafo completo e, pelo Teorema 3, o número cromático total distinto na vizinhança é conhecido.

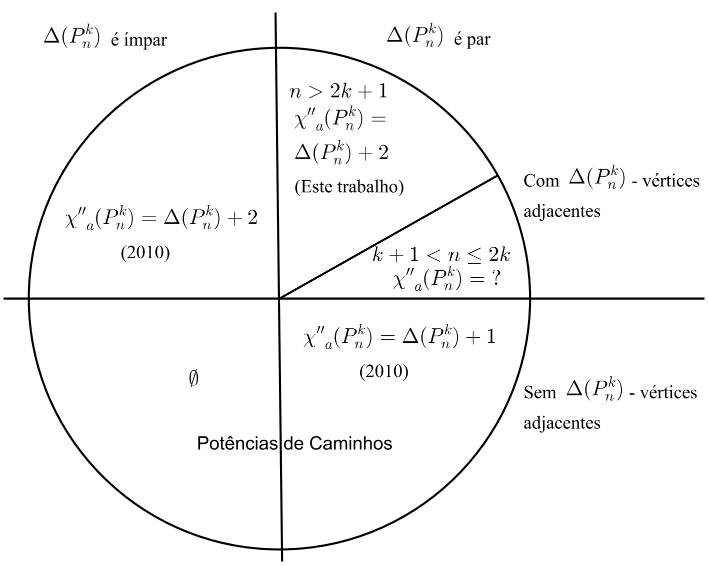

Figura 5: Estado da arte do Problema da Coloração Total Distinta na Vizinhança em potências de caminhos

A Figura 5 apresenta o estado da arte do Problema da Coloração TDV em potências de caminhos que não são grafos completos. O lado esquerdo concentra os grafos com $\Delta(P_n^k)$ ímpar e o lado direito apresenta os grafos com $\Delta(P_n^k)$ par. O lado superior apresenta os grafos com vértices adjacentes de grau máximo e o lado inferior apresenta os grafos sem vértices adjacentes de grau máximo. Os resultados desse trabalho concentram-se no quadrante superior direito. Quando $n > 2k+1$, obrigatoriamente $\Delta(P_n^k) = 2k$ é par e determinamos o número cromático total dessas potências de caminhos. O caso em que $k+1 < n \leq 2k$ e $\Delta(P_n^k)$ é par permanece aberto. Portanto, nesse quadrante ainda há grafos para os quais o problema não está resolvido. Observe que, quando a potência de caminho P_n^k não têm vértices adjacentes de grau máximo, então $n = 2k+1$ e $\chi''_a(P_n^k) = \Delta(P_n^k)+1$, pelo Teorema 9. Neste caso, $\Delta(P_n^k)$ é par. Então, não existem potências de caminhos no quadrante inferior esquerdo.

Os grafos do quadrante superior esquerdo são potências de caminhos com $n \neq 2k+1$. Neste caso, $\chi''_a(P_n^k) = \Delta(P_n^k)+2$, pelo Teorema 10. Note que este caso só ocorre quando $n < 2k+1$.

5. REFERÊNCIAS

[1] X. Chen. On the adjacent vertex distinguishing total coloring numbers of graphs with $\Delta = 3$. *Discrete Mathematics*, 308(17):4003–4007, 2008.

[2] C. M. d. Figueiredo, J. Meidanis e C. P. de Mello. Total-chromatic number and chromatic index of dually chordal graphs. *Information processing letters*, 70(3):147–152, 1999.

[3] V. Pedrotti e C. P. de Mello. Adjacent-vertex-distinguishing total coloring of indifference graphs. *Matemática contemporânea*, 39:101–110, 2010.

[4] F. S. Roberts. On the compatibility between a graph and a simple order. *Journal of Combinatorial Theory, série B*, 11(1):28 – 38, 1971.

[5] Z. Zhang, X. Chen, J. Li, B. Yao, X. Lu e J. Wang. On adjacent-vertex-distinguishing total coloring of graphs. *Science in China série A: mathematics*, 48(3):289–299, 2005.