Coloração total distinta na vizinhança em grafos 4-partidos completos

Matheus Scaketti
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Av Monteiro Lobato, s/n - Km 04 CEP 84016-210
Ponta Grossa, Brasil
mts.scaketti@gmail.com

Sheila Morais de Almeida
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Av Monteiro Lobato, s/n - Km 04 CEP 84016-210
Ponta Grossa, Brasil
sheilaalmeida@utfpr.edu.br

RESUMO

Uma coloração total de um grafo G consiste na atribuição de cores para os vértices e para as arestas de G de forma que elementos adjacentes recebam cores distintas. O conjunto de cores de um vértice u é composto pela cor do vértice u e pelas cores das arestas que incidem em u. Uma coloração total distinta na vizinhança é em uma coloração total onde vértices adjacentes possuem conjuntos de cores distintos. O Problema da Coloração Total Distinta na Vizinhança consiste em determinar o menor número de cores para se obter uma coloração total distinta na vizinhança para um dado grafo. Neste trabalho, resolvemos o Problema da Coloração Total Distinta na Vizinhança para os grafos 4-partidos completos que possuem vértices adjacentes de grau máximo. Quando o grafo 4-partido completo não possui vértices adjacentes de grau máximo, apresentamos um limitante superior que difere do ótimo em no máximo um.

Palavras-chave

4-partidos completos; Coloração total distinta na vizinhança; Grafos multipartidos completos

ABSTRACT

A total coloring is an assignment of colors to the edges and the vertices of a graph such that adjacent elements receive distinct colors. The color-set of a vertex u is the set with the color of u and the colors of the edges incident to u. An adjacent vertex distinguishing total coloring is a total coloring such that any pair of adjacent vertices have distinct color-sets. The Adjacent Vertex Distinguishing Total Coloring Problem is to determine the least number of colors to obtain an adjacent vertex distinguishing total coloring for a given graph. In this work we solve the Adjacent Vertex Distinguishing Total Coloring Problem of complete 4-partite graphs with adjacent vertices of maximum degree. When the complete 4-partite graph has no adjacent vertices with maximum degree, we present an upper bound that differs from the optimum by at most one.

Keywords

Complete 4-partite graphs; Adjacent vertex distinguishing total coloring; Complete multipartite graphs

WPCCG '17 Outubro, 2017, Ponta Grossa, Paraná, Brasil
.

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho os grafos considerados são simples e conexos. Um grafo $G = (V(G), E(G))$ tem conjunto de vértices $V(G)$ e conjunto de arestas $E(G)$. Dois elementos são adjacentes se são dois vértices conectados por uma aresta, duas arestas incidentes no mesmo vértice ou uma aresta e um vértice em que ela incide. Uma coloração total é uma atribuição de cores para os vértices e arestas de um grafo G e é própria se quaisquer dois elementos adjacentes têm cores distintas. O menor número de cores que permite uma coloração total de um grafo G é o número cromático total de G, denotado por $\chi''(G)$. Dado um grafo G com uma coloração total própria, o conjunto de cores de u é o conjunto composto pela cor do vértice u e pelas cores das arestas que incidem em u. Uma coloração total distinta na vizinhança (coloração TDV) é uma coloração total própria, onde os conjuntos de cores de quaisquer dois vértices adjacentes são distintos. O Problema da Coloração TDV consiste em determinar, para um dado grafo G, o menor número de cores possível que permita uma coloração TDV de G. Esse número de cores é chamado de número cromático TDV e é denotado por $\chi''_a(G)$.

Seja $\Delta(G)$ o maior grau de um vértice de G. Em 2005, Zhang et al. [6] introduziram o Problema da Coloração TDV e apresentaram a seguinte conjectura.

Conjectura 1. *[6] Se G é um grafo simples, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 3$.*

No mesmo trabalho, Zhang et al. [6] também apresentaram o seguinte limitante inferior para o número cromático TDV de grafos com vértices adjacentes de grau máximo.

Teorema 2. *[6] Se G é um grafo simples com vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi''_a(G) \geq \Delta(G) + 2$.*

Os mesmos autores determinaram o número cromático TDV para os grafos completos, conforme o teorema a seguir.

Teorema 3. *[6] Se K_n é um grafo completo com n vértices, então $\chi''_a(K_n) = \Delta(K_n) + 2$ quando n é par, e $\chi''_a(K_n) = \Delta(K_n) + 3$ quando n é ímpar.*

Um conjunto independente é um conjunto de vértices dois a dois não adjacentes. Os grafos k-partidos são aqueles cujo conjunto de vértices pode ser particionado em k conjuntos independentes. Se existe uma aresta entre quaisquer dois vértices em partes distintas então o grafo k-partido é chamado de k-partido completo. Quando um grafo k-partido completo tem $k = 2$ e partes com tamanhos m e n, o mesmo é chamado de bipartido completo e denotado por $K_{m,n}$. Dado um grafo k-partido completo, se todas as partes têm o mesmo tamanho, então G é chamado k-equipartido completo. O teorema a seguir valida a Conjectura 1 para os k-equipartidos completos.

Teorema 4. *[1] Seja G um grafo k-equipartido completo, com $k \geq 2$ e partes de tamanho $r \geq 2$. Se rk é par, então $\chi_a''(G) = \Delta(G)+2$. Se rk é ímpar, então $\chi_a''(G) \leq \Delta(G)+3$.*

Zhang [6] provou que o bipartido completo $K_{m,n}$ tem $\chi_a''(K_{m,n}) = \Delta(K_{m,n})+1$ quando $1 < n < m$, e $\chi_a''(K_{m,n}) = \Delta(K_{m,n})+2$, caso contrário. Para os grafos tripartidos completos, a Conjectura 1 foi provada em 2014 [1]. Mais especificamente, Luiz [1] mostrou que $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 2$, quando G é um tripartido completo sem vértices adjacentes de grau máximo e que $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$ quando o grafo tripartido completo tem partição $\{A, B, C\}$ onde $|A| \geq 2|B| = 2|C|$. Em 2016, Tiburcio [2] provou que se G é um tripartido completo não isomorfo ao K_3, então $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Neste trabalho, determinamos $\chi_a''(G)$ para grafos 4-partidos completos que possuem vértices adjacentes de grau máximo. Quando o grafo 4-partido completo não possui vértices adjacentes de grau máximo, apresentamos um limitante superior que difere do ótimo em no máximo um.

2. DEFINIÇÕES E RESULTADOS ANTERIORES

As definições e teoremas desta seção são importantes para a construção dos resultados que serão apresentados.

Um emparelhamento é um conjunto de arestas duas a duas não adjacentes e é maximal quando não está propriamente contido em outro emparelhamento. Um emparelhamento M é perfeito quando em cada vértice de G incide uma aresta de M.

Uma coloração de arestas é uma atribuição de cores para as arestas de G e é própria se quaisquer duas arestas adjacentes têm cores distintas. O menor número de cores que permite uma coloração de arestas própria é chamado de índice cromático de G e denotado por $\chi'(G)$.

Dado um grafo G e um subconjunto de vértices $X \subseteq V(G)$, o subgrafo de G induzido por X, denotado por $G[X]$, é o subgrafo H com $V(H) = X$ e $E(H) = \{uv : u \in X \wedge v \in X \wedge uv \in E(G)\}$. O núcleo de um grafo G é o conjunto de vértices com grau $\Delta(G)$.

Teorema 5. *[3] Seja G um grafo simples. Se o núcleo de G é um conjunto independente, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Em 1989, Yap [4] determinou um limitante superior para o número cromático total de todos os grafos k-partidos completos, conforme o teorema a seguir.

Teorema 6. *[4] Se G é um grafo k-partido completo, então $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Um grafo é k-regular se todos os seus vértices têm grau k.

Teorema 7. *[5] Sejam n e p dois inteiros positivos tais que $n > p$. Se pelo menos um entre n e p é par, então é possível construir um grafo $(n - p - 1)$-regular de ordem n.*

3. RESULTADOS

Nesta seção apresentamos provas de que $\chi_a''(G) \leq \Delta(G)+2$ para os grafos 4-partidos completos, provando a Conjectura 1 para esta classe. A demonstração foi dividida em casos, de acordo com o tamanho de cada parte. Note que é suficiente considerar os casos em que o grafo tem partes de tamanhos diferentes, pois quando o grafo é 4-equipartido completo, então tem ordem par e a solução é dada pelo Teorema 4.

Se as cardinalidades das partes do grafo k-partido completo G são duas a duas distintas, então qualquer coloração total de G é uma coloração TDV, já que os conjuntos de cores de vértices adjacentes se distinguem por sua cardinalidade. Pelo Teorema 6, conclui-se o seguinte resultado.

Teorema 8. *[6] Se G é um grafo k-partido completo tal que as cardinalidades de quaisquer dois conjuntos da partição são distintas, então $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Resta considerar os casos em que existem duas ou três partes com o mesmo tamanho. A divisão dos casos é feita da seguinte forma: as três partes menores têm a mesma cardinalidade; exatamente duas partes menores têm a mesma cardinalidade; as três partes maiores têm a mesma cardinalidade; as duas partes de mesma cardinalidade não são a menor nem a maior; e apenas as duas partes maiores têm a mesma cardinalidade.

Lema 9. *Seja G um grafo 4-partido completo com partição $\{A, B, C, D\}$. Se $|A| = |B| = |C| = |D| - 1$, então $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$.*

Prova. Seja G um grafo 4-partido completo com partição $\{A, B, C, D\}$ tal que $|A| = |B| = |C| = |D| - 1$. Considere um emparelhamento perfeito M_{BC} no subgrafo induzido $G[B \cup C]$. Pinte as arestas de M_{BC} com a cor $\Delta(G)+1$. Observe que A é o núcleo do subgrafo $G - M_{BC}$ e, pelo Teorema 5, é possível colorir as arestas de $G - M_{BC}$ com $\Delta(G)$ cores. Observe que $|V(G)| = 4|A| + 1$ é ímpar. Como o número de vértices é ímpar, em qualquer coloração de arestas de $G - M_{BC}$, cada cor incide em no máximo $|V(G)| - 1$ vértices. Como foram usadas $\Delta(G)$ cores, cada uma delas falta em algum vértice de $G - M_{BC}$. Como em $G - M_{BC}$ existem $\Delta(G)$ vértices com grau igual a $\Delta(G) - 1$, em cada um deles falta uma cor. Então, as cores que faltam em dois vértices quaisquer de $G - M_{BC}$ são duas a duas distintas. Pinte os vértices de B, C e D com as cores que faltam nesses vértices. Faça um emparelhamento maximal no subgrafo induzido $G[C \cup D]$ e troque as cores das arestas desse emparelhamento pela cor $\Delta(G) + 2$. Pinte os vértices de A com a cor $\Delta(G) + 2$.

A Figura 1 apresenta um esquema da coloração aplicada ao grafo 4-partido completo com três partes de tamanho 3 e uma parte de tamanho 4. As arestas que não aparecem coloridas estão pintadas com uma coloração de arestas própria usando cores de 1 a 10. Os vértices de $B \cup C \cup D$ estão coloridos com cores que sobraram após a coloração de arestas própria do grafo $G - M_{BC}$.

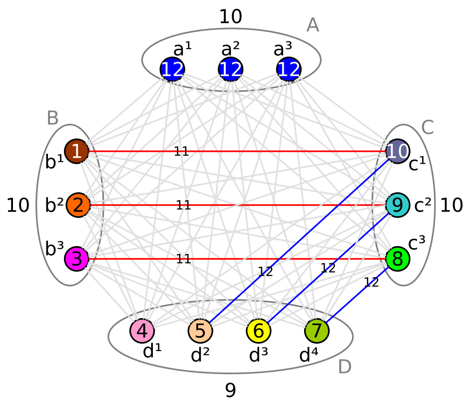

Figura 1: Grafo após passos do Lema 9

Essa é uma coloração TDV para o grafo G: os conjuntos de cores dos vértices de D se distinguem dos demais por sua cardinalidade; os conjuntos de cores dos vértices de C são os únicos que têm tanto a cor $\Delta(G)+1$ quanto a cor $\Delta(G)+2$; os conjuntos de cores dos vértices de B são os únicos que têm a cor $\Delta(G)+1$ e não têm a cor $\Delta(G)+2$; e os conjuntos de cores dos vértices de A têm a cor $\Delta(G)+2$ tal como os conjuntos de cores dos vértices em D, mas têm cardinalidades diferentes.

Como existem vértices adjacentes com grau máximo, pelo Teorema 2, $\chi''_a(G) = \Delta(G)+2$. $\square$

Lema 10. *Seja G um grafo 4-partido completo com partição $\{A,B,C,D\}$. Se $|A| = |B| = |C| < |D|-1$ com ordem par, então $\chi''_a(G) = \Delta(G)+2$.*

Prova. Seja G um grafo 4-partido completo com partição $\{A,B,C,D\}$ tal que $|A| = |B| = |C| < |D|-1$ e o número de vértices é par. Note que neste caso $|A|$ e $|D|$ têm a mesma paridade. Insira um vértice a' em A e faça-o adjacente aos vértices de $B \cup C \cup D$. Faça dois emparelhamentos perfeitos M_{BC1} e M_{BC2} no subgrafo induzido $G[B \cup C]$. Pelo Lema 7, é possível aumentar o grau dos vértices de D injetando arestas entre seus vértices de forma que $G[D]$ seja $(|D|-|A|-1)$-regular. Seja $M = M_{BC1} \cup M_{BC2}$ e $G-M$ o subgrafo de G obtido pela remoção das arestas do conjunto M. Observe que agora A é o núcleo de $G-M$ e pelo Teorema 5, é possível colorir as arestas de $G-M$ com $\Delta(G)$ cores. Note que o número de vértices é ímpar, e em qualquer coloração de arestas de $G-M$, cada cor incide em no máximo $|V(G)|-1$ vértices. Como foram usadas $\Delta(G)$ cores, cada uma delas falta em algum vértice de $G-M$. Como em $G-M$ existem $\Delta(G)$ vértices com grau igual a $\Delta(G)-1$, em cada um deles falta uma cor. Então, as cores que faltam em dois vértices quaisquer de $G-M$ são duas a duas distintas. Pinte os vértices de A e as arestas do emparelhamento M_{BC1} com cor $\Delta(G)+1$. Pinte o emparelhamento M_{BC2} com cor $\Delta(G)+2$. Pinte os vértices de B, C e D com as cores das respectivas arestas que os conectam ao vértice a' e remova o vértice a'. Remova as arestas que foram injetadas entre os vértices de D. Essa é uma coloração TDV do grafo G: os conjuntos de cores dos vértices de D se distinguem dos conjuntos de cores dos vértices de A, B e C por sua cardinalidade; os conjuntos de cores dos vértices de A se distinguem dos demais pois não tem cor $\Delta(G)+2$; os conjuntos de cores dos vértices de B se distinguem dos vértices de C pois $|V(G)+a'|$ é ímpar, portanto, as cores que sobraram em quaisquer dois desses vértices são distintas. Como existem vértices adjacentes com grau máximo, pelo Teorema 2, $\chi''_a(G) = \Delta(G)+2$. $\square$

Lema 11. *Seja G um grafo 4-partido completo com partição $\{A,B,C,D\}$. Se $|A| = |B| = |C| < |D|-1$ com ordem ímpar, então $\chi''_a(G) = \Delta(G)+2$.*

Prova. Seja G um grafo 4-partido completo com partição $\{A,B,C,D\}$ tal que $|A| = |B| = |C| < |D|-1$ e o número de vértices é ímpar. Note que neste caso $|A|$ e $|D|$ têm paridades distintas. Faça um emparelhamento perfeito M_{BC} no subgrafo induzido $G[B \cup C]$. Pelo Lema 7, é possível aumentar o grau dos vértices de D injetando arestas entre seus vértices de forma que $G[D]$ seja $(|D|-|A|-1)$-regular. Remova as arestas do emparelhamento M_{BC}. Observe que agora A é o núcleo de $G-M_{BC}$ e pelo Teorema 5, é possível colorir as arestas de $G-M_{BC}$ com $\Delta(G)$ cores. Observe que $|V(G)| = 3|A|+|D|$ é ímpar. Como o número de vértices é ímpar, em qualquer coloração de arestas de $G-M_{BC}$, cada cor incide em no máximo $|V(G)|-1$ vértices. Como foram usadas $\Delta(G)$ cores, cada uma delas falta em algum vértice de $G-M_{BC}$. Como em $G-M_{BC}$ existem $\Delta(G)$ vértices com grau igual a $\Delta(G)-1$, em cada um deles falta uma cor distinta. Então, as cores que faltam em dois vértices quaisquer de $G-M_{BC}$ são duas a duas distintas. Pinte os vértices de B, C e D com as cores que faltam nesses vértices. Pinte os vértices de A com cor $\Delta(G)+2$ e o emparelhamento M_{BC} com cor $\Delta(G)+1$. Faça um emparelhamento perfeito M_{CD} no subgrafo induzido $G[C \cup D]$ e pinte o emparelhamento M_{CD} com cor $\Delta(G)+2$. Remova as arestas que foram injetadas entre os vértices de D. Essa é uma coloração TDV do grafo G: os conjuntos de cores dos vértices de D se distinguem dos conjuntos de cores dos vértices de A, B e C por sua cardinalidade; os conjuntos de cores dos vértices de A se distinguem dos conjuntos de cores dos vértices de B e C pois são os únicos que possuem a cor $\Delta(G)+2$ e não possuem a cor $\Delta(G)+1$; os conjuntos de cores dos vértices de C se distinguem dos vértices de B pois são os únicos que possuem tanto a cor $\Delta(G)+1$ quanto a cor $\Delta(G)+2$. Como existem vértices adjacentes com grau máximo, pelo Teorema 1, $\chi''_a(G) = \Delta(G)+2$. $\square$

Lema 12. *Seja G um grafo 4-partido completo com partição $\{A,B,C,D\}$. Se $|A| = |B| < |C| \leq |D|$, então $\chi''_a(G) = \Delta(G)+2$.*

Prova. Seja G um grafo 4-partido completo com partição $\{A,B,C,D\}$ tal que $|A| = |B| < |C| \leq |D|$. Faça um emparelhamento maximal M_{BD} no subgrafo induzido $G[B \cup D]$ e pinte as arestas de M_{BD} com a cor $\Delta(G)+2$. Como $|B| < |D|$, existe um conjunto T de vértices de D onde não incidem arestas de M_{BD}. Pinte os vértices de T com a cor $\Delta(G)+2$. Insira um vértice a' em A e faça-o adjacente aos vértices de $B \cup C \cup (D \setminus T)$. Faça um emparelhamento maximal M_{BC} no subgrafo induzido $G[B \cup C]$ e pinte as arestas desse emparelhamento com a cor $\Delta(G)+1$. Como $|B| < |C|$ existe um conjunto S de vértices de C onde não incidem arestas do emparelhamento M_{BC}. Faça um emparelhamento maximal M_{SD} no subgrafo induzido $G[S \cup D]$ e pinte as arestas de M_{SD} com a cor $\Delta(G)+1$. Seja $M = M_{BD} \cup M_{BC} \cup M_{SD}$ e $G-M$ o subgrafo de G obtido pela remoção das arestas do conjunto M. Observe que A é o núcleo de $G - M$ e pelo Teorema 5, é possível colorir as arestas de $G - M$ com $\Delta(G)$ cores. Pinte os vértices de B, C e $D \setminus T$ com as cores das respectivas arestas que os conectam ao vértice a' e remova o vértice a'. Pinte os vértices de A com a cor $\Delta(G) + 1$.

Essa é uma coloração TDV do grafo G: como os conjuntos de cores dos vértices em B e D possuem a cor $\Delta(G)+2$ eles se distinguem dos conjuntos de cores dos vértices de A e C; os conjuntos de cores dos vértices de D se distinguem dos conjuntos de cores dos vértices de B por sua cardinalidade; os conjuntos de cores dos vértices de A têm cor $\Delta(G) + 1$ e não têm a cor $\Delta(G) + 2$ tal como o conjunto de cores dos vértices em C, mas têm cardinalidades diferentes.

Como existem vértices adjacentes com grau máximo, pelo Teorema 2, $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$. □

Lema 13. *Seja G um grafo 4-partido completo com partição $\{A, B, C, D\}$. Se $|A| < |B| = |C| = |D|$, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Prova. Seja G um grafo 4-partido completo com partição $\{A, B, C, D\}$ tal que $|A| < |B| = |C| = |D|$. Insira um vértice a' em A e faça-o adjacente a todos os vértices das outras partes. Faça um emparelhamento perfeito M_{BC} no subgrafo induzido $G[B \cup C]$ e um emparelhamento perfeito M_{CD} no subgrafo induzido $G[C \cup D]$. Pinte as arestas dos emparelhamentos M_{BC} e M_{CD} com cores $\Delta(G)+1$ e $\Delta(G)+2$, respectivamente. Sejam $M = M_{BC} \cup M_{CD}$ e $G - M$ o subgrafo de G obtido pela remoção das arestas de M. Observe que A é o núcleo de $G - M$ e pelo Teorema 5, é possível colorir as arestas de $G - M$ com $\Delta(G)$ cores. Pinte os vértices de B, C e D com as cores das respectivas arestas que os conectam ao vértice a' e remova a'. Pinte os vértices de A com a cor $\Delta(G) + 1$.

Essa é uma coloração TDV do grafo G: os conjuntos de cores dos vértices de C são os únicos que têm tanto a cor $\Delta(G) + 1$ quanto a cor $\Delta(G) + 2$; os conjuntos de cores dos vértices de B se distinguem dos conjuntos de cores dos vértices de D pois os primeiros têm a cor $\Delta(G) + 1$ e os últimos têm a cor $\Delta(G) + 2$. Portanto, $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$. □

Lema 14. *Seja G um grafo 4-partido completo com partição $\{A, B, C, D\}$. Se $|A| < |B| = |C| < |D|$, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Prova. Seja G um grafo 4-partido completo com partição $\{A, B, C, D\}$ tal que $|A| < |B| = |C| < |D|$. Insira um vértice a' em A e faça-o adjacente a todos os vértices das outras partes. Faça um emparelhamento perfeito M_{BC} no subgrafo induzido $G[B \cup C]$, e um emparelhamento maximal M_{CD} no subgrafo induzido $G[C \cup D]$. Pinte as arestas dos emparelhamentos M_{BC} e M_{CD} com cores $\Delta(G) + 1$ e $\Delta(G) + 2$, respectivamente. Como $|C| < |D|$, existe um conjunto S de vértices em D onde não incidem arestas do emparelhamento M_{CD}. Então, pinte os vértices de S com a cor $\Delta(G) + 2$. Sejam $M = M_{BC} \cup M_{CD}$ e $G - M$ o subgrafo de G obtido pela remoção das arestas de M. Observe que A é o núcleo de $G - M$ e pelo Teorema 5, é possível colorir as arestas de $G - M$ com $\Delta(G)$ cores. Pinte os vértices de B, C e D com as cores das respectivas arestas que os conectam ao vértice a' e remova a'. Pinte os vértices de A com a cor $\Delta(G) + 1$.

Essa é uma coloração TDV do grafo G: o conjunto de cores dos vértices de D e B não têm, respectivamente, as cores $\Delta(G)+1$ e $\Delta(G)+2$; os conjuntos de cores dos vértices de C são os únicos que têm tanto a cor $\Delta(G) + 1$ quanto a cor $\Delta(G) + 2$; os conjuntos de cores dos vértices de A têm cor $\Delta(G) + 1$ tal como os conjuntos de cores dos vértices de B, mas têm cardinalidades diferentes. Portanto, $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$. □

Lema 15. *Seja G um grafo 4-partido completo com partição $\{A, B, C, D\}$. Se $|A| < |B| < |C| = |D|$, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Prova. Seja G um grafo 4-partido completo com partição $\{A, B, C, D\}$ tal que $|A| < |B| < |C| = |D|$. Insira um vértice a' em A e faça-o adjacente a todos os vértices das outras partes. Faça um emparelhamento maximal M_{BD} no subgrafo induzido $G[B \cup D]$. Como $|B| < |D|$, existe um conjunto S de vértices em D onde não incidem arestas de M_{BD}. Pinte os vértices de S e as arestas do emparelhamento M_{BD} com a cor $\Delta(G) + 1$. Pinte os vértices de A com a cor $\Delta(G) + 2$. Observe que A é o núcleo de $G - M_{BD}$ e pelo Teorema 5, é possível colorir as arestas de $G - M_{BD}$ com $\Delta(G)$ cores. Pinte os vértices das partes B, C e D com as cores das respectivas arestas que os conectam ao vértice a' e remova a'.

Essa é uma coloração TDV do grafo G: os conjuntos de cores dos vértices de D se distinguem dos conjuntos de cores dos vértices de C pois possuem a cor $\Delta(G) + 1$; os conjuntos de cores dos vértices de A, B e C se distinguem entre si por suas cardinalidades. Portanto, $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$. □

Pelos lemas desta seção, vale o seguinte corolário.

Corolário 16. *Se G é um grafo 4-partido completo, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

4. CONCLUSÃO

Dos resultados apresentados, conclui-se que a Conjectura 1 é válida para os grafos 4-partidos completos. Pelos resultados do Teorema 4 e dos Lemas 9, 10, 11 e 12 conclui-se o seguinte teorema.

Teorema 17. *Se G é um grafo 4-partido completo com vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$.*

Pelo Teorema 3 e pelos resultado conhecidos para k-partidos completos quando $k \in \{2, 3, 4\}$, propomos a seguinte conjectura.

Conjectura 18. *Se G é um grafo k-partido completo não isomorfo ao grafo completo K_k, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

5. REFERÊNCIAS

[1] A. G. Luiz. Sobre a coloração total semiforte. Master's thesis, Unicamp, 2014.

[2] I. R. Tiburcio and S. M. Almeida. Coloração total semiforte de grafos tripartidos completos, 2016. Trabalho de Conclusão de Curso.

[3] V. G. Vizing. Critical graph with a given chromatic class. *Diskret. Analiz*, (5):6–17, 1965.

[4] H. P. Yap. Total colourings of graphs. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 21(2):159–163, 1989.

[5] H. P. Yap. *Total colourings of graphs.* Springer, 2006.

[6] Z. Zhang. On adjacent-vertex-distinguishing total coloring of graphs. *Sci China Ser A*, 48(3):289, 2005.