Criticalidade arco-íris dos grafos resultantes de produto cartesiano de ciclos e caminhos

Aleffer Rocha
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Av. Monteiro Lobato, s/n - Km 04 CEP
84016-210 - Ponta Grossa - PR - Brasil
aleffer@alunos.utfpr.edu.br

Sheila Morais de Almeida
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Av. Monteiro Lobato, s/n - Km 04 CEP
84016-210 - Ponta Grossa - PR - Brasil
sheilaalmeida@utfpr.edu.br

RESUMO

Dado um grafo G, uma coloração de arestas de G é uma atribuição de cores para as arestas de G. Uma coloração de arestas é própria se arestas adjacentes têm cores distintas. Uma coloração arco-íris de um grafo conexo G é uma coloração de arestas, não necessariamente própria, tal que entre qualquer par de vértices de G existe um caminho cujas cores das arestas são duas a duas distintas. O número de conexão arco-íris de um grafo G, denotado por $rc(G)$, é o menor número de cores necessárias para se obter uma coloração arco-íris de G. Um grafo G é arco-íris crítico se a remoção de qualquer aresta de G aumenta o seu número de conexão arco-íris. Neste trabalho mostramos que o produto cartesiano $P_m \times P_n$ é arco-íris crítico se, e somente se, é um caminho P_n, $n > 1$, ou um C_4. Também mostramos que os produtos cartesianos $C_m \times P_n$ não são arco-íris críticos quando m é par e $n > 1$.

Palavras-chave

Coloração Arco-íris; Produto Cartesiano; Grafos Arco-íris Críticos

ABSTRACT

Given a graph G, an edge-coloring of G is an assingment of colors to the edges of G. A proper edge-coloring is an edge coloring if adjacent edges have different colors. A rainbow coloring of a connected graph G is an edge coloring that is not necessarily proper such that there is a path between any pair of vertices of G whose edge colors are pairwise distinct. The rainbow connection number of a graph G, denoted as $rc(G)$, is the least number of colors for which there is a rainbow coloring of G. A graph G is rainbow critical if its rainbow connection number increases when we remove any edge from G. In this work we show that the cartesian product $P_m \times P_n$ is rainbow critical if and only if it is a path P_n, $n > 1$, or a C_4. We also show that the cartesian product $C_m \times P_n$ is not rainbow critical when m is even and $n > 1$.

WPCCG '17 Outubro, 2017, Ponta Grossa, Paraná, Brasil
.

Keywords

Rainbow Coloring; Cartesian Product; Rainbow Critical Graphs

1. INTRODUÇÃO

Nesse trabalho, os grafos considerados são simples e conexos. Uma coloração de arestas em G é uma atribuição de cores para as arestas de G. As cores em geral são representadas por números inteiros. Uma coloração de arestas é própria se arestas incidentes em um mesmo vértice têm cores distintas. Dado um grafo G com uma coloração de arestas não necessariamente própria, um caminho P em G é arco-íris se as cores das arestas de P são duas a duas distintas. Uma coloração de arestas de G é uma coloração arco-íris se entre qualquer par de vértices de G existe um caminho arco-íris [3]. O Problema da Coloração Arco-íris consiste em encontrar o menor número de cores que permite uma coloração arco-íris de um grafo conexo G. Este número é conhecido como número de conexão arco-íris e é denotado por $rc(G)$. Observe que quando G é um grafo desconexo, existe um par de vértices u e v que não está conectado por um caminho. Neste caso, não há cores suficientes para se ter um caminho arco-íris entre u e v, e consequentemente o número de conexão arco-íris é infinito.

Sabe-se que o Problema da Coloração Arco-íris é NP-difícil [2] e decidir se $rc(G) = k$, para $k \geq 3$, é um problema NP-completo [1]. Entretanto, em algumas classes de grafos, o número de conexão arco-íris é trivial, por exemplo, para uma árvore T com n vértices $rc(T) = n - 1$; para um grafo completo K_n, $rc(K_n) = 1$; e para um ciclo C_n, $rc(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ [3].

Em face da dificuldade de calcular o valor de $rc(G)$ para um grafo qualquer, alguns trabalhos estabelecem limitantes superiores (cada vez mais justos) para o número de conexão arco-íris. Um dos primeiros resultados nesse sentido explora a quantidade de arestas presentes na árvore geradora de G. Uma árvore geradora em um grafo G é um subgrafo de G com o mesmo conjunto de vértices que G e que não contém ciclos. Observe que grafos que contêm ciclos possuem mais de uma árvore geradora. Assim, para obter uma coloração arco-íris de qualquer grafo simples e conexo G, é suficiente atribuir cores distintas para todas as arestas de uma das suas árvores geradoras, o que implica $rc(G) \leq |V(G)| - 1$.

Ainda considerando a dificuldade para se determinar o valor de $rc(G)$ em um grafo G qualquer, outros estudos se concentram na solução do problema em classes de grafos mais restritas. Uma dessas classes é a dos grafos resultantes da operação de produto cartesiano. Considere dois grafos simples $G = (V(G), E(G))$ e $H = (V(H), E(H))$. O produto cartesiano de G e H, denotado por $G \times H$, é um grafo com o conjunto de vértices dado pelo produto cartesiano $V(G) \times V(H)$, onde existe aresta entre dois vértices (v_i, u_j) e (v_k, u_l) se e somente se $v_i v_k \in E(G)$ e $u_j = u_l \in V(H)$ ou se $u_j u_l \in E(H)$ e $v_i = v_k \in V(G)$.

Para os grafos resultantes de produtos cartesianos, o Teorema 1 estabelece uma relação entre o número de conexão arco-íris e o diâmetro dos grafos participantes da operação do produto cartesiano. O conceito de diâmetro de um grafo G depende do conceito de excentricidade de um vértice v, que é a maior distância entre v e qualquer outro vértice do grafo G. O diâmetro de um grafo G, denotado por $diam(G)$, é a maior excentricidade de um vértice de G.

Teorema 1. *[4] Seja $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$, $n \geq 2$, tal que G_i é conexo, $1 \leq i \leq n$. Então $rc(G) \leq \sum_{i=1}^{n} rc(G_i)$. Além disso, se $diam(G_i) = rc(G_i)$ para todo G_i, $1 \leq i \leq n$, então $rc(G) = \sum_{i=1}^{n} rc(G_i)$.*

Dos resultados para árvores e ciclos [3] e do Teorema 1, pode-se inferir que $rc(P_m \times P_n) = m + n - 2$, para dois caminhos, P_m e P_n, $2 \leq m \leq n$; $rc(C_m \times C_n) = \frac{m+n}{2}$ para dois ciclos, C_m e C_n, m e n pares, $3 < m \leq n$; e $rc(C_m \times P_n) = n - 1 + \frac{m}{2}$ para um caminho P_n e um ciclo C_m, m par. Rocha e Almeida [6] determinaram $rc(C_m \times P_n)$ quando m é ímpar e $rc(C_m \times C_n)$ quando m e n têm paridades distintas. Os mesmos autores provaram que $rc(C_m \times C_n) \leq \frac{m+n}{2}$ se m e n são ímpares, melhorando o limitante apresentado no Teorema 1.

Além do interesse em determinar o número de conexão arco-íris, há estudos sobre a criticalidade dos grafos quanto ao número de conexão arco-íris. Um grafo G é chamado grafo arco-íris crítico se, ao remover uma aresta qualquer de G, o número de conexão arco-íris de G aumenta [5]. Em [5], os autores afirmam que os produtos cartesianos $P_m \times P_n$, $m, n \geq 2$, e $C_m \times P_n$, m par e $n \geq 2$, são grafos arco-íris críticos. Neste trabalho, refutamos tais resultados e apresentamos uma prova de que o grafo $P_m \times P_n$ é arco-íris crítico se, e somente se, é um caminho P_n, $n > 1$, ou um C_4. Também provamos que os produtos cartesianos $C_m \times P_n$ não são arco-íris críticos quando m é par e $n > 1$.

2. DEFINIÇÕES E RESULTADOS ANTERIORES

Alguns conceitos e resultados anteriores importantes para o entendimento deste trabalho são definidos nesta seção. Pelas definições de diâmetro e de número de conexão arco-íris, pode-se concluir as seguintes observações.

Observação 1. *Dados dois grafos, G e H, $diam(G \times H) = diam(G) + diam(H)$.*

Observação 2. *Dado um grafo G, $rc(G) \geq diam(G)$.*

Observação 3. *Todo caminho P_n tem $diam(P_n) = n - 1$ e todo ciclo C_n tem $diam(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

A seguir, são apresentados formalmente os resultados sobre os números de conexão arco-íris de grafos caminhos e ciclos, que são as classes consideradas neste trabalho. Como todo caminho é uma árvore, o Teorema 2 vale para os caminhos.

Teorema 2. *[3] Seja G um grafo conexo não trivial com $|E(G)|$ arestas. Então:*

(a) $rc(G) = 1$ se e somente se G é um grafo completo,

(b) $rc(G) = |E(G)|$ se e somente se G é uma árvore.

Para os ciclos, vale o Teorema 3.

Teorema 3. *[3] Para todo ciclo C_n com $n \geq 4$, $rc(C_n) = \lceil n/2 \rceil$.*

Da Observação 3 e dos Teoremas 1, 2 e 3, pode-se inferir que $rc(P_m \times P_n) = m + n - 2$, para dois caminhos, P_m e P_n, com $2 \leq m \leq n$; $rc(C_m \times C_n) = \frac{m+n}{2}$ para dois ciclos, C_m e C_n, com $3 < m \leq n$ e m e n pares; e $rc(C_m \times P_n) = \frac{m}{2} + n - 1$ para um ciclo C_m e um caminho P_n com m par e $m > 3$.

3. RESULTADOS

Esta seção apresenta resultados sobre a criticalidade dos produtos cartesianos entre dois caminhos e entre um ciclo e um caminho. Os resultados estão divididos em dois teoremas, onde o primeiro garante que $P_m \times P_n$ é crítico apenas quando é um caminho P_n, $n > 1$, ou um C_4; e o segundo teorema garante que grafos $C_m \times P_n$ com m par e $n > 1$ não são arco-íris críticos. É importante observar que $P_m \times P_n$ e $P_n \times P_m$ são grafos isomorfos, bem como $C_m \times P_n$ e $P_n \times C_m$.

Teorema 4. *Sejam m e n inteiros positivos. O grafo $G = P_m \times P_n$ é arco-íris crítico se, e somente se, é um grafo P_n, $n > 1$ ou um C_4.*

Prova. Primeiro, observe que o grafo P_1 não possui arestas e em todo caminho P_n tal que $n > 1$, existe uma aresta cuja a remoção desconecta o grafo. Por definição, o número de conexão arco-íris do grafo desconexo é infinito. Logo, quando $n > 1$, P_n é arco-íris crítico.

O grafo $P_2 \times P_2$ é um ciclo com quatro vértices e, pelo Teorema 3, $rc(P_2 \times P_2) = rc(C_4) = 2$. O grafo $P_2 \times P_2$ sem qualquer de suas arestas é um caminho P_4 e pelo Teorema 2 tem $rc(P_4) = 3$. A Figura 1 apresenta um grafo $P_2 \times P_2$ seguido do grafo $P_2 \times P_2 - e$, mostrando que este grafo é arco-íris crítico.

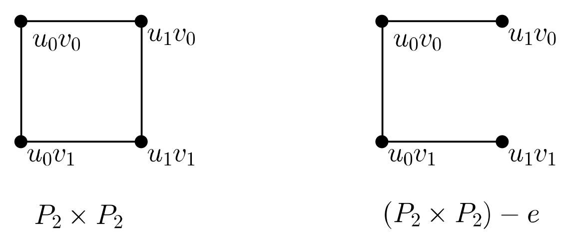

Figura 1: Grafos $P_2 \times P_2$ e $P_2 \times P_2 - e$.

Para todos os outros casos, é suficiente mostrar que existe uma aresta e no grafo $P_m \times P_n$ cuja remoção não aumenta o número de conexão arco-íris do grafo. Sem perda de generalidade, suponha que $m \geq n \geq 2$ e $P_m \times P_n$ não é um C_4.

Para identificação dos vértices do produto cartesiano, suponha que os vértices de P_m estão rotulados, u_0, u_1, $\ldots$, u_{m-1}, de forma que u_i é adjacente a u_{i+1} no P_m, $0 \leq$

$i < m-1$. Similarmente, suponha que os vértices de P_n estão rotulados, v_0, v_1, $\ldots, v_{n-1}$, e v_i é adjacente a v_{i+1}, $0 \leq i < n-1$. Então, cada vértice do $P_m \times P_n$ é um par (u_i, v_j), $0 \leq i < m$ e $0 \leq j < n$. A Figura 2 apresenta os vértices do grafo $P_4 \times P_3$ rotulados.

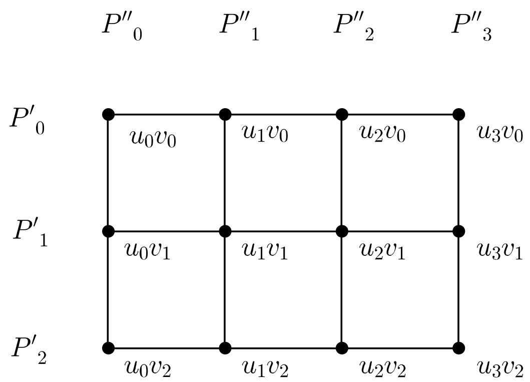

Figura 2: Rotulação dos vértices do grafo $P_4 \times P_3$.

No grafo $P_m \times P_n$, definimos os subgrafos P'_i e P''_i da seguinte forma: $P'_i = (u_0, v_i)(u_1, v_i) \ldots (u_{m-1}, v_i)$, $0 \leq i < n$ e $P''_i = (u_i, v_0)(u_i, v_1) \ldots (u_i, v_{n-1})$, $0 \leq i < m$.

Vamos mostrar que a remoção de uma aresta $e = (u_k, v_f)(u_k, v_{f+1})$ em um caminho P''_k, $0 \leq k < m$, $0 \leq f < n-1$, não aumenta o número de conexão arco-íris do grafo.

Pinte os caminhos P''_i, $0 \leq i < m$, de forma que cada aresta $(u_i, v_j)(u_i, v_{j+1})$ receba cor j, $0 \leq j < n-1$. Pinte os caminhos P'_i de forma que cada aresta $(u_j, v_i)(u_{j+1}, v_i)$ receba a cor $n-1+[(i+j) \bmod (m-1)]$. Observe que qualquer caminho P'_i ou P''_j é arco-íris, $0 \leq i < n$, $0 \leq j < m$. Além disso, o conjunto das cores usadas em qualquer caminho P'_i é disjunto do conjunto das cores usadas em qualquer caminho P''_j, $0 \leq i < n$, $0 \leq j < m$. Por fim, observe que as arestas $(u_a, v_i)(u_a, v_{i+1})$ e $(u_b, v_i)(u_b, v_{i+1})$ estão coloridas com a mesma cor, para quaisquer i, a e b, $0 \leq i < n-1$, $0 \leq a, b < m$.

Resta provar que entre qualquer par de vértices (u_q, v_p) e (u_s, v_r), $0 \leq q, s < m$ e $0 \leq p, r < n$, existe um caminho arco-íris no grafo $(P_m \times P_n) - e$, onde $e = (u_k, v_f)(u_k, v_{f+1})$.

Quando $p \neq r$ e $q \neq s$, pelo menos um dos seguintes caminhos arco-íris existe:

1. caminho de (u_q, v_p) a (u_s, v_p) em P'_p concatenado com o caminho de (u_s, v_p) a (u_s, v_r) em P''_s;
2. ou o caminho de (u_q, v_p) a (u_q, v_r) em P''_q concatenado com o caminho de (u_q, v_r) a (u_s, v_r) em P'_r.

A Figura 3 apresenta o grafo $P_4 \times P_3$ com uma aresta removida, onde as arestas pontilhadas indicam o caminho arco-íris. Observe que, neste caso, o caminho arco-íris descrito no item (2) deixou de existir quando a aresta foi removida. Entretanto o caminho descrito no item (1) ainda existe e é apresentado nesse exemplo.

Se $q = s$, suponha sem perda de generalidade que $p < r$. Se $k \neq q$ ou se $f \notin [p, r-1]$, então o caminho arco-íris é o caminho entre (u_q, v_p) e (u_q, v_r) em P''_q. Por outro lado, se $k = q$ e $f \in [p, r-1]$, o caminho arco-íris entre (u_q, v_p) e (u_q, v_r) depende do valor de q. Quando $q > 0$, um caminho arco-íris é o caminho de (u_q, v_p) a (u_q, v_f) em P''_q, concatenado com

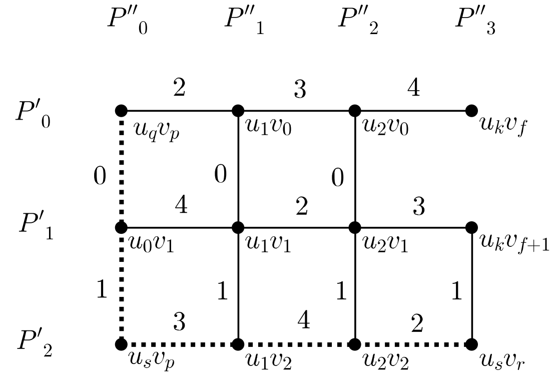

Figura 3: Grafo $(P_4 \times P_3) - e$ com caminho arco-íris.

o caminho $(u_q, v_f)(u_{q-1}, v_f)(u_{q-1}, v_{f+1})(u_q, v_{f+1})$, concatenado com o caminho de (u_q, v_{f+1}) a (u_q, v_r) em P''_q. Quando $q = 0$, um caminho arco-íris é o caminho de (u_q, v_p) a (u_q, v_f) em P''_q, concatenado com o caminho (u_q, v_f) (u_{q+1}, v_f) $(u_{q+1}, v_{f+1})(u_q, v_{f+1})$, concatenado com o caminho de (u_q, v_{f+1}) a (u_q, v_r) em P''_q.

Se $p = r$, suponha sem perda de generalidade que $q < s$. O caminho arco-íris é o caminho de (u_q, v_p) a (u_s, v_p) em P'_p. $\square$

Teorema 5. *Sejam m e n inteiros positivos. O grafo $C_m \times P_n$, m par e $n \geq 2$, não é arco-íris crítico.*

Prova. Considere o grafo $C_m \times P_n$, onde C_m é um ciclo com m par e P_n é um caminho $n \geq 2$. Suponha os vértices de C_m rotulados sequencialmente, $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$, e os vértices de P_n também rotulados sequencialmente, $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$. A Figura 4 apresenta, como exemplo, o produto cartesiano $C_4 \times P_2$ com seus vértices rotulados.

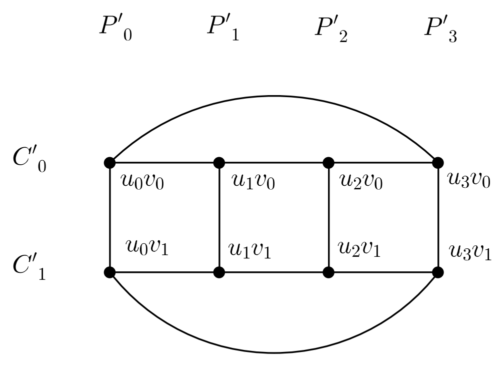

Figura 4: Grafo $C_4 \times P_2$ com vértices rotulados.

Denotamos por C'_i os subgrafos de $C_m \times P_n$ dados por $(u_0, v_i)(u_1, v_i) \ldots (u_{m-1}, v_i)(u_0, v_i)$, $0 \leq i < n$. Denotamos por P'_i os subgrafos de $C_m \times P_n$ dados por $(u_i, v_0)(u_i, v_1) \ldots (u_i, v_{n-1})$, $0 \leq i < m$.

Primeiro, vamos colorir o grafo $C_m \times P_n$. Pinte C'_i, $0 \leq i < n$, i par, da seguinte forma. Se $0 \leq j < m-1$, pinte a aresta $(u_j, v_i)(u_{j+1}, v_i)$ com a cor $j \bmod \frac{m}{2}$. Pinte $(u_{m-1}, v_i)(u_0, v_i)$ com a cor $\frac{m}{2} - 1$.

Pinte C'_i, $0 \leq i < n$, i ímpar, da seguinte forma. Se

$0 \leq j < m-1$, pinte a aresta $(u_j, v_i)(u_{j+1}, v_i)$ com a cor $(j+1) \bmod \frac{m}{2}$. Pinte $(u_{m-1}, v_i)(u_0, v_i)$ com a cor 0.

Pinte cada aresta $(u_i, v_j)(u_i, v_{j+1}) \in P'_i$, $0 \leq i < m$ e $0 \leq j < n-1$, com cor $\frac{m}{2} + j$.

Observe que a coloração de cada ciclo C'_i e cada caminho P'_j é arco-íris, $0 \leq i < n$ e $0 \leq j < m$. Para garantir que $C_m \times P_n$ não é arco-íris crítico, basta mostrar que existe uma aresta cuja remoção não aumenta o número de conexão arco-íris do grafo. Então, vamos considerar o grafo $C_m \times P_n - e$, onde $e = (u_k, v_f)(u_k, v_{f+1})$, $0 \leq k < m$ e $0 \leq f < n-1$. Mostraremos que a remoção da aresta e não aumenta o número de conexão arco-íris do grafo $C_m \times P_n$.

Sejam (u_q, v_p) e (u_s, v_r) dois vértices quaisquer de $C_m \times P_n$. Vamos apresentar um caminho arco-íris entre (u_q, v_p) e (u_s, v_r) no grafo $C_m \times P_n - e$.

Se $p = r$, então o caminho arco-íris entre (u_q, v_p) e (u_s, v_r) é o menor caminho entre esses vértices no subgrafo C'_p.

Se $q = s$, suponha sem perda de generalidade que $p < r$. Se $k \neq q$ ou se $f \notin [p, r-1]$, então o caminho arco-íris é o caminho entre (u_q, v_p) e (u_q, v_r) em P'_q. Por outro lado, se $k = q$ e $f \in [p, r-1]$, o caminho arco-íris entre (u_q, v_p) e (u_q, v_r) depende do valor de q. Quando $q > 0$, um caminho arco-íris é o caminho de (u_q, v_p) a (u_q, v_f) em P'_q, concatenado com o caminho $(u_q, v_f)(u_{q-1}, v_f)(u_{q-1}, v_{f+1})(u_q, v_{f+1})$, concatenado com o caminho de (u_q, v_{f+1}) a (u_q, v_r) em P'_q. Quando $q = 0$, um caminho arco-íris é o caminho de (u_q, v_p) a (u_q, v_f) em P'_q, concatenado com o caminho (u_q, v_f) (u_{q+1}, v_f) $(u_{q+1}, v_{f+1})(u_q, v_{f+1})$, concatenado com o caminho de (u_q, v_{f+1}) a (u_q, v_r) em P'_q. A Figura 5 apresenta, como exemplo, o produto cartesiano $C_4 \times P_2$ com uma aresta removida, onde as arestas pontilhadas indicam o caminho arco-íris entre os vértices $u_q v_p$ e $u_s v_r$, onde $q = s = 0$, $k = q$ e $f \in [p, r-1]$.

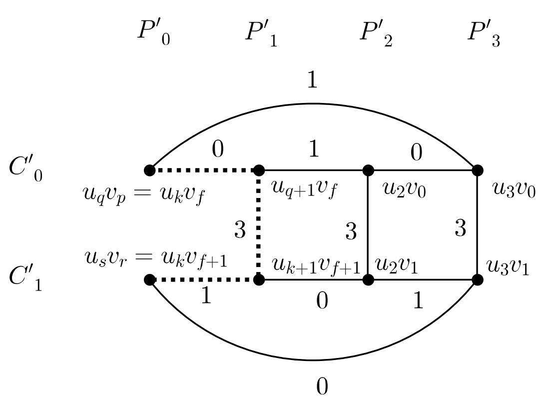

Figura 5: Grafo $(C_4 \times P_2) - e$ com caminho arco-íris.

Se $p \neq r$ e $q \neq s$, então um dos seguintes caminhos arco-íris existe:

1. o menor caminho entre (u_q, v_p) a (u_s, v_p) em C'_p concatenado com o caminho de (u_s, v_p) a (u_s, v_r) em P'_s;
2. ou o caminho de (u_q, v_p) a (u_q, v_r) em P'_q concatenado com o menor caminho de (u_q, v_r) a (u_s, v_r) em C'_r.

Como existe pelo menos uma aresta em $C_m \times P_n$ que quando removida não altera o número de conexão arco-íris do grafo, conclui-se que o grafo $C_m \times P_n$ não é arco-íris crítico. $\square$

4. CONCLUSÃO

A definição apresentada anteriormente para grafos arco-íris críticos não era suficientemente precisa, considerando que não estava claro se um grafo é arco-íris crítico quando a remoção de uma aresta o desconecta. Neste trabalho, propomos que o número de conexão arco-íris de um grafo desconexo seja infinito. Dessa forma, se a remoção de uma aresta desconecta o grafo, então ele é arco-íris crítico. Considerando essa definição, todo caminho P_n, $n > 1$ tem uma aresta que quando removida aumenta o número de conexão arco-íris. Portanto, esses grafos são arco-íris críticos. Embora essa seja uma família de grafos arco-íris críticos resultantes do produto cartesiano de dois caminhos, provamos que o produto cartesiano $P_m \times P_n$ não é arco-íris crítico quando $m \geq n \geq 2$ e o grafo não é um C_4. Observe que este resultado contrapõe o resultado apresentado por Rao e Murali [5]. Dos nossos estudos, concluímos que essa diferença se deve ao fato de que Rao e Murali consideraram uma única possibilidade de coloração. Nesta coloração, a remoção de qualquer aresta uv faz com que não exista mais caminho arco-íris entre u e v. Então, Rao e Murali afirmam que é necessária mais uma cor. Entretanto, apresentamos uma coloração diferente na qual a remoção de uma aresta específica não aumenta o número de conexão arco-íris. Pela definição de grafo arco-íris crítico apresentada por Rao e Murali [5], acreditamos que o nosso resultado está correto. Similarmente, provamos que o produto cartesiano de $C_m \times P_n$ não é arco-íris crítico quando m é par e $n \geq 2$, refutando outra afirmação de Rao e Murali [5].

5. REFERÊNCIAS

[1] P. Ananth, M. Nasre, e K. K. Sarpatwar. Rainbow Connectivity: Hardness and Tractability. In S. Chakraborty e A. Kumar, editors, *IARCS Annual Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science (FSTTCS 2011)*, volume 13 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 241–251, Dagstuhl, Germany, 2011. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik.

[2] S. Chakraborty, E. Fischer, A. Matsliah, e R. Yuster. Hardness and algorithms for rainbow connectivity. *Journal of Combinatorial Optimization*, 21:330–347, 2011.

[3] G. Chartrand, G. L. Johns, K. A. McKeon, e P. Zhang. Rainbow connection in graphs. *Mathematica Bohemica*, 133(1):85–98, 2008.

[4] X. Li, Y. Shi, e Y. Sun. Rainbow connections of graphs: A survey. *Graphs and Combinatorics*, 29(1):1–38, 2013.

[5] K. S. Rao e R. Murali. Rainbow critical graphs. *International Journal of Computer Application*, 4(4):252–259, 2014.

[6] A. Rocha e S. M. Almeida. Coloração arco-íris em grafos resultantes de produto cartesiano. In *Anais do XXXVII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação*, pages 83–86, São Paulo, SP, julho 2017.