

Aparecimento de cliques em grafos aleatórios lei de potência no modelo de ligação preferencial

David Reksidler Júnior
Murilo Vicente Gonçalves da Silva

Universidade Federal do Paraná

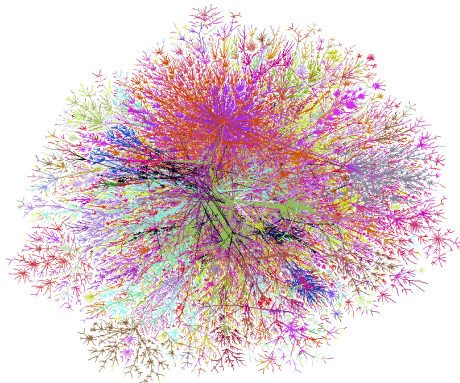
20/07/2019

Sumário

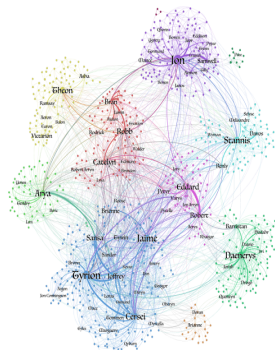
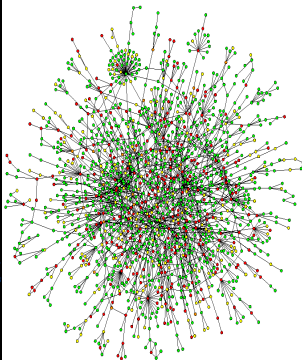
- 1 Introdução
- 2 Modelos de Grafos Aleatórios
- 3 Cliques
- 4 Conclusão
- 5 Referencias

Introdução

Com o avanço na capacidade de processamento e armazenando de grandes quantidades de dados, foi-se observado que muitas redes complexas de grande porte advindas de situações práticas apresentam uma **distribuição lei de potência nos graus dos vértices**.

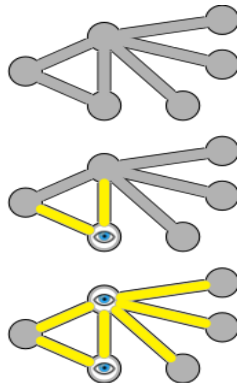
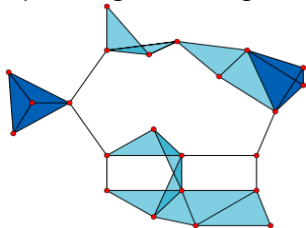


Introdução



Introdução

Muitos pesquisadores acreditam que pode ser mais fácil resolver alguns problemas de otimização combinatória em grafos de lei de potência do que em outros tipos de grafos em geral.



Introdução

- Lei de potência em redes complexas
 - Faloutsos et al. (1999) - **Internet**
 - Guelzim et al.(2002) - **Redes Genéticas**
 - Eubank et al. (2004) - **Redes de interações sociais**
- Relevância Algorítmica
 - Da Silva, M. O. et al. (2013) - **Cobertura por vértices**
 - Rogiski, R. (2016) - **Coloração de vértices**

Introdução

■ Teóricos

- Shen, Y. et al. (2012) -
 - **Cobertura por vértices**
 - **Conjunto independente**
- Gast, M. e Hauptmann, M. (2014) -
 - **Cobertura por vértices**
- Gast, M. et al. (2015) -
 - **Conjunto Dominante**
- Vignatti, A. L. e da Silva, M. V. G. (2016) -
 - **Cobertura por vértices**

Introdução

- 1 Contexto do trabalho:** Encontrar evidências que esclareçam o motivo do bom desempenho de algoritmos gulosos em grafos lei de potência para o problema da clique máxima.

Introdução

- 1 Contexto do trabalho:** Encontrar evidências que esclareçam o motivo do bom desempenho de algoritmos gulosos em grafos lei de potência para o problema da clique máxima.
- 2 Estágio atual do trabalho:**
 - Compreender o fenômeno do aparecimento de cliques em modelos de grafos aleatórios que seguem a lei de potência.

Definições

Teoria de Probabilidade

- Espaço de Probabilidade, Eventos, Variável aleatória, Esperança...

Grafos

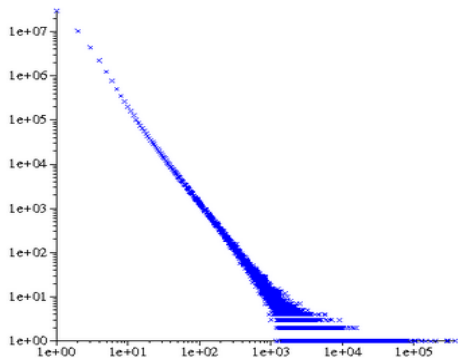
- Grafo, Vizinhança, Incidência, Grau...

Definições

Definição: (Distribuição lei de potência)

$$P_{deg}(k) \approx k^{-\beta},$$

onde β é o expoente da lei de potência.



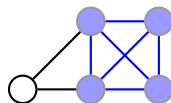
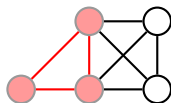
Definições

Definição: (Clique)

$S \subseteq V(G)$, t.q. $\forall u, v \in S \Rightarrow \{u, v\} \in E(G)$

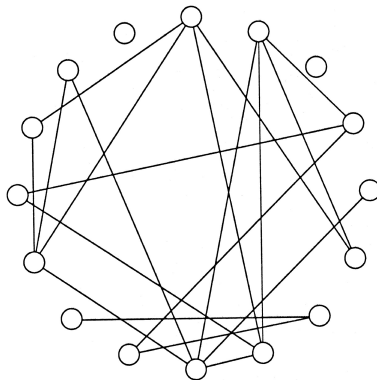
Problema: (Clique Máxima)

Encontrar a clique com o maior número de vértices para um dado grafo.



Modelos de Grafos Aleatórios

- O estudo de grafos aleatórios foi iniciado por Paul Erdős e Alfréd Rényi, numa sequência de publicações na década de 60.
- Grafo aleatório é amostrado de acordo com uma certa distribuição.



Modelo de Ligação Preferencial

Definição: (Modelos de Ligação Preferencial)

- 1 Redes crescem continuamente pela adição de novos vértices.

Modelo de Ligação Preferencial

Definição: (Modelos de Ligação Preferencial)

- 1 Redes crescem continuamente pela adição de novos vértices.
- 2 Novos vértices que vão sendo adicionados, se conectam preferencialmente a vértices que já possuam bastante conexões.

Modelo de Ligação Preferencial - Hofstad

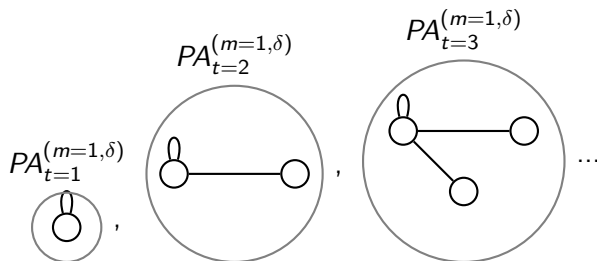
Definição: (Modelo proposto por Hofstad (2010))

- Produz uma sequência de grafos não direcionados denotada por $(PA_t^{(m,\delta)})_{t>1}$.

Modelo de Ligação Preferencial - Hofstad

Definição: (Modelo proposto por Hofstad (2010))

- Produz uma sequência de grafos não direcionados denotada por $(PA_t^{(m,\delta)})_{t>1}$.



Modelo de Ligação Preferencial - Hofstad

Definição: (Modelo proposto por Hofstad (2010))

- Produz uma sequência de grafos não direcionados denotada por $(PA_t^{(m,\delta)})_{t>1}$.
- Vértices são denotados como $\{v_1^{(m)}, v_2^{(m)}, \dots, v_t^{(m)}\}$
- $D_i(t) =$ grau do vértice $v_i^{(1)}$ no tempo t .

Modelo de Ligação Preferencial - Hofstad

Definição: (Modelo proposto por Hofstad (2010) (cont...))

- $PA_1^{(1,\delta)}$ consiste em um grafo de um único vértice com um laço.

$$v_1^{(1)} \circlearrowleft D_1(1) = 2$$

Modelo de Ligação Preferencial - Hofstad

Definição: (Modelo proposto por Hofstad (2010) (cont...))

- $PA_1^{(1,\delta)}$ consiste em um grafo de um único vértice com um laço.
- Consecutivamente em $PA_t^{(1,\delta)}$, a regra de crescimento para se obter $PA_{t+1}^{(1,\delta)}$:
 - 1 Adicione um vértice v_{t+1} contendo uma aresta em $PA_{t+1}^{(1,\delta)}$.

Modelo de Ligação Preferencial - Hofstad

Definição: (Modelo proposto por Hofstad (2010) (cont...))

- $PA_1^{(1,\delta)}$ consiste em um grafo de um único vértice com um laço.
- Consecutivamente em $PA_t^{(1,\delta)}$, a regra de crescimento para se obter $PA_{t+1}^{(1,\delta)}$:
 - 1 Adicione um vértice v_{t+1} contendo uma aresta em $PA_{t+1}^{(1,\delta)}$.
 - 2 A aresta é conectada a outro vértice com probabilidade:

$$Pr(v_{t+1}^{(1)} \rightarrow v_i^{(1)}) = \begin{cases} \frac{1+\delta}{(2+\delta)t+1+\delta}, & \text{se } i = t + 1 \\ 0, & \text{se } i \neq t + 1 \end{cases}, \forall \delta \geq -1$$

Modelo de Ligação Preferencial - Hofstad

Definição: (Modelo proposto por Hofstad (2010) (cont...))

- $PA_1^{(1,\delta)}$ consiste em um grafo de um único vértice com um laço.
- Consecutivamente em $PA_t^{(1,\delta)}$, a regra de crescimento para se obter $PA_{t+1}^{(1,\delta)}$:
 - 1 Adicione um vértice v_{t+1} contendo uma aresta em $PA_{t+1}^{(1,\delta)}$.
 - 2 A aresta é conectada a outro vértice com probabilidade:

$$Pr(v_{t+1}^{(1)} \rightarrow v_i^{(1)}) = \begin{cases} \frac{1+\delta}{(2+\delta)t+1+\delta}, & \text{se } i = t + 1 \\ \frac{D_i(t)+\delta}{(2+\delta)t+1+\delta}, & \text{se } 0 < i < t + 1 \end{cases}, \forall \delta \geq -1$$

Modelo de Ligação Preferencial - Hofstad

Exemplo: (Modelo proposto por Hofstad (2010))

- $PA_{t=1}^{(m=1, \delta=1)}$

$$v_1^{(1)} \text{ (red circle with loop) } D_1(1) = 2$$

Modelo de Ligação Preferencial - Hofstad

Exemplo: (Modelo proposto por Hofstad (2010))

■ $PA_{t=2}^{(m=1, \delta=1)}$

$v_1^{(1)}$  $Pr = 60\%$

$v_2^{(1)}$  $Pr = 40\%$

Modelo de Ligação Preferencial - Hofstad

Exemplo: (Modelo proposto por Hofstad (2010))

■ $PA_{t=2}^{(m=1, \delta=1)}$



Modelo de Ligação Preferencial - Hofstad

Exemplo: (Modelo proposto por Hofstad (2010))

■ $PA_{t=3}^{(m=1, \delta=1)}$

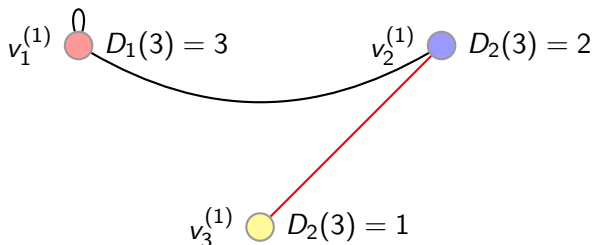


$v_3^{(1)}$ (yellow) $Pr = 0.25$

Modelo de Ligação Preferencial - Hofstad

Exemplo: (Modelo proposto por Hofstad (2010))

■ $PA_{t=3}^{(m=1, \delta=1)}$



Modelo de Ligação Preferencial - Hofstad

Definição: (Modelo para $m > 1$)

Modelo de Ligação Preferencial - Hofstad

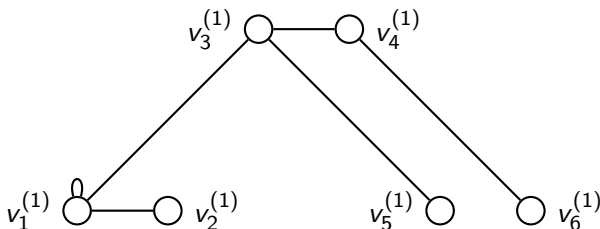
Definição: (Modelo para $m > 1$)

$$\blacksquare PA_{t=3}^{(m=2,\delta)} \implies PA_{t=m \cdot t}^{(m=1,\delta/m)}$$

Modelo de Ligação Preferencial - Hofstad

Definição: (Modelo para $m > 1$)

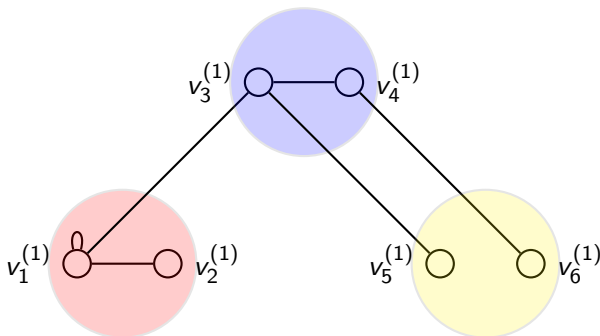
$$\blacksquare PA_{t=3}^{(m=2,\delta)} \implies PA_{t=m \cdot t}^{(m=1,\delta/m)} = PA_{t=6}^{(m=1,\delta/m)}$$



Modelo de Ligação Preferencial - Hofstad

Definição: (Modelo para $m > 1$ (cont...))

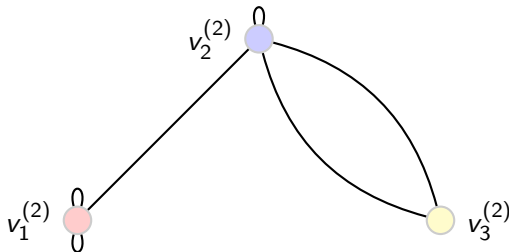
$$\blacksquare PA_{t=3}^{(m=2,\delta)} \implies PA_{t=m-t}^{(m=1,\delta/m)} = PA_{t=6}^{(m=1,\delta/m)}$$



Modelo de Ligação Preferencial - Hofstad

Definição: (Modelo para $m > 1$ (cont...))

$$\blacksquare PA_{t=3}^{(m=2,\delta)} \implies PA_{t=m \cdot t}^{(m=1,\delta/m)} = PA_{t=6}^{(m=1,\delta/m)}$$

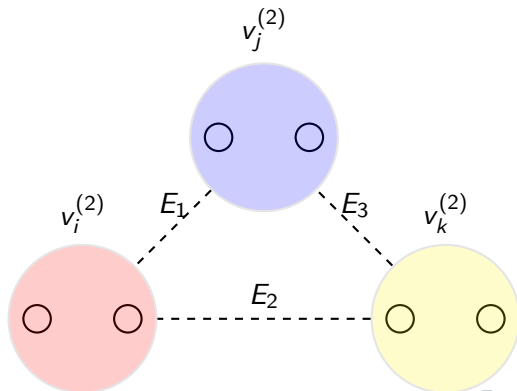


Aparecimento de cliques

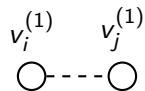
- Para que haja ciclos no grafo (e conseqüentemente cliques de tamanho maior que 2), precisa-se de $m > 1$ e $t > 2$.

Aparecimento de cliques

- Para que haja ciclos no grafo (e consequentemente cliques de tamanho maior que 2), precisa-se de $m > 1$ e $t > 2$.
- Exemplo de clique tamanho 3:

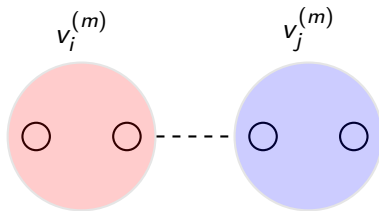


Aparecimento de cliques

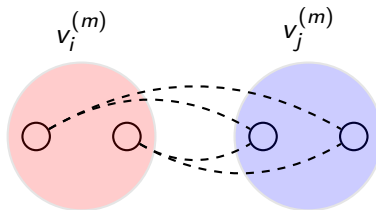


$$Pr(v_i^{(1)} \rightarrow v_j^{(1)}) = \frac{D_i(t) + \delta}{(2 + \delta)t + 1 + \delta}$$

Aparecimento de cliques



Aparecimento de cliques



Lema 1:

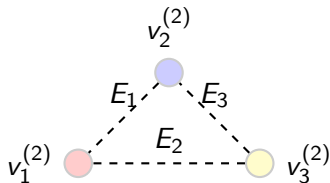
$$Pr(v_i^{(m)} \rightarrow v_j^{(m)}) = \sum_{l=(i-1)m+1}^{im} \sum_{k=(j-1)m+1}^{jm} \frac{D_k(l-1) + \delta}{(l-1)(2+\delta) + (1+\delta)}$$

Aparecimento de cliques

Teorema 1:

$$Pr(K_3 \subseteq G) = \sum_{\substack{S_i \in [t] \\ |S|=t-3}} \prod_{\substack{0 < j, k \\ j, k \in [t] \setminus S_i}} Pr(v_j^{(m)} \rightarrow v_k^{(m)})$$

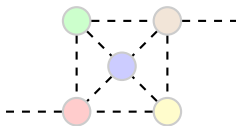
Aparecimento de cliques



Prova:

$$\begin{aligned}
 Pr(v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, v_3^{(2)} \rightarrow K_3) &= Pr(E_1) \cdot Pr(E_2) \cdot Pr(E_3) \\
 &= Pr(v_j^{(m)} \rightarrow v_i^{(m)}) \cdot Pr(v_k^{(m)} \rightarrow v_i^{(m)}) \\
 &\quad \cdot Pr(v_k^{(m)} \rightarrow v_j^{(m)})
 \end{aligned}$$

Aparecimento de cliques



Generalizando:

$$Pr(K_3 \subseteq G) = \sum_{\substack{S_i \in [t] \\ |S_i| = t-3}} \prod_{\substack{0 < j, k \\ j, k \in [t] \setminus S_i}} Pr(v_j^{(m)} \rightarrow v_k^{(m)})$$

Aparecimento de cliques


Teorema 2:


$$Pr(K_\ell \subseteq G) = \sum_{\substack{S_i \in [t] \\ |S| = t - \ell}} \prod_{\substack{0 < j, k \\ j, k \in [t] \setminus S_i}} Pr(v_j^{(m)} \rightarrow v_k^{(m)})$$


Conclusão


- Os resultados obtidos contribuem para analisar o surgimento de cliques de diversos tamanhos em grafos aleatórios lei de potência.
- Isso deve ajudar no desempenho de algoritmos de otimização em tais grafos lei de potência.
- O passo seguinte neste projeto será obter resultados analíticos a respeito do tamanho da maior clique do grafo e realizar experimentos com o problema da clique máxima.

Referências I


 AIELLO, W.; CHUNG, F.; LU, L. A random graph model for power law graphs. *Experimental Mathematics*, v. 10, n. 1, p. 53–66, 2001.


 BARABÁSI, A.-L.; ALBERT, R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 286, n. 5439, p. 509–512, 1999.


 BARABÁSI, A.-L.; BONABEAU, E. Scale-free networks. *Scientific american*, JSTOR, v. 288, n. 5, p. 60–69, 2003.


 BENDER, E. A.; CANFIELD, E. R. The asymptotic number of labeled graphs with given degree sequences. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, Elsevier, v. 24, n. 3, p. 296–307, 1978.


Referências II

 BOLLOBÁS, B. et al. The degree sequence of a scale-free random graph process. *Random Structures & Algorithms*, Wiley Online Library, v. 18, n. 3, p. 279–290, 2001.


 BRITTON, T.; DEIJFEN, M.; MARTIN-LÖF, A. Generating simple random graphs with prescribed degree distribution. *Journal of Statistical Physics*, v. 124, n. 6, p. 1377–1397, 2006.


 CHAUHAN, A.; FRIEDRICH, T.; ROTHENBERGER, R. Greed is good for deterministic scale-free networks. *arXiv preprint arXiv:1610.04217*, 2016.


 EASLEY, D.; KLEINBERG, J. *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.


 ERDŐS, P.; RÉNYI, A. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, v. 5, n. 1, p. 17–60, 1960.

Referências III





 ERDŐS, P.; RÉNYI, A. On the strength of connectedness of a random graph. *Acta Mathematica Hungarica*, v. 12, n. 1-2, p. 261–267, 1961.

 EUBANK, S. et al. Structural and algorithmic aspects of massive social networks. *Proceedings of the fifteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, p. 718–727, 2004.


 FALOUTSOS, M.; FALOUTSOS, P.; FALOUTSOS, C. On power-law relationships of the internet topology. *ACM SIGCOMM computer communication review*, v. 29, n. 4, p. 251–262, 1999.


 GAST, M.; HAUPTMANN, M. Approximability of the vertex cover problem in power-law graphs. *Theoretical Computer Science*, Elsevier, v. 516, p. 60–70, 2014.


Referências IV


-  GAST, M.; HAUPTMANN, M.; KARPINSKI, M. Inapproximability of dominating set on power law graphs. *Theoretical Computer Science*, Elsevier, v. 562, p. 436–452, 2015.
-  GUELZIM, N. et al. Topological and causal structure of the yeast transcriptional regulatory network. *Nature genetics*, Nature Publishing Group, v. 31, n. 1, p. 60, 2002.
-  HOFSTAD, R. V. D. Random graphs and complex networks. In: _____. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. p. 543–555.
-  LIMA, A. M. Algoritmos exatos para o problema da coloração de grafos. 2017.

Referências V





 MITZENMACHER, M.; UPFAL, E. *Probability and Computing Randomization and Probabilistic Techniques in Algorithms and Data Analysis*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017.

 MLODINOW, L. *O andar do bêbado: Como o acaso determina nossas vidas*. Zahar, 2009. ISBN 9788537801819. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=X0niXrHmsZUC>.


 MOLLOY, M.; REED, B. A critical point for random graphs with a given degree sequence. *Random structures & algorithms*, Wiley Online Library, v. 6, n. 2-3, p. 161–180, 1995.


 PARK, K.; LEE, H. On the effectiveness of route-based packet filtering for distributed dos attack prevention in power-law internets. v. 31, n. 4, p. 15–26, 2001.

Referências VI

-  ROGISKI, R. *Desempenho do algoritmo guloso na coloração de vértices em grafos de sistemas complexos*. Dissertação (B.S. thesis) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2016.
-  SALGANIK, M.; DODDS, P.; WATTS, D. Experimental study of inequality and unpredictability in an artificial cultural market. *Science*, v. 311, n. 1, p. 854–856, 2006.
-  SHEN, Y. et al. New techniques for approximating optimal substructure problems in power-law graphs. *Theoretical Computer Science*, Elsevier, v. 447, p. 107–119, 2012.
-  SILVA, M. O. D.; GIMENEZ-LUGO, G. A.; SILVA, M. V. D. Vertex cover in complex networks. *International Journal of Modern Physics C*, World Scientific, v. 24, n. 11, p. 1350078, 2013.

Referências VII

 VIGNATTI, A. L.; SILVA, M. V. G. da. Minimum vertex cover in generalized random graphs with power law degree distribution. *Theoretical Computer Science*, v. 647, n. 1, p. 101–111, 2016.

 WEST, D. B. et al. *Introduction to graph theory*. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, 2001. v. 2.

Agradecimentos

Obrigado pela atenção!