

# **Criticalidade arco-íris em rodas e leques**

Aleffer Rocha

Sheila Moraes de Almeida

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Ponta Grossa

20 de setembro de 2019

# Coloração de Arestas

Coloração de arestas própria e não própria.

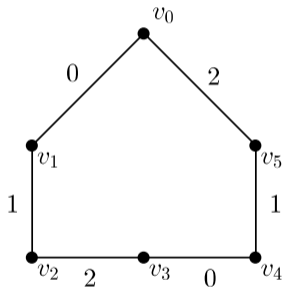


Figura: (a) Grafo  $G$  com uma coloração própria.

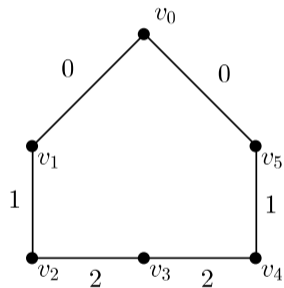


Figura: (b) Grafo  $G$  com uma coloração não própria.

# Caminho Arco-íris

Caminho arco-íris.

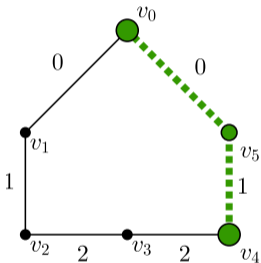


Figura: (a) Caminho arco-íris  
 $v_0v_5v_4$ .

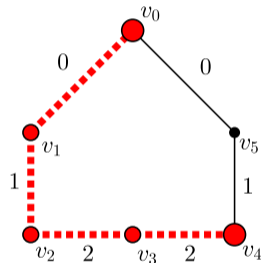


Figura: (b) Caminho não arco-íris  
 $v_0v_1v_2v_3v_4$ .

# Coloração Arco-íris

Uma coloração não necessariamente própria

$$c : E(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, k - 1\}$$

é *arco-íris* se existe um caminho arco-íris entre qualquer par de vértices de  $G$  (CHARTRAND et al., 2008).

# Problema da Coloração Arco-íris

Número de conexão arco-íris:

- $rc(G)$ : menor número de cores para se obter uma coloração arco-íris em  $G$ .

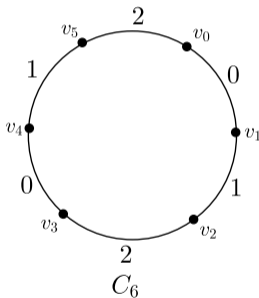


Figura: Uma coloração arco-íris para o grafo  $C_6$  utilizando  $rc(C_6)$  cores.

# Dificuldade do Problema

Teorema (CHAKRABORTY et al., 2011)

Dado um grafo  $G$ , calcular o  $rc(G)$  é NP-difícil.

# Dificuldade do Problema

Teorema (CHAKRABORTY et al., 2011; ANANTH; NASRE; SARPATWAR, 2011; LI; LI, 2011)

Decidir se  $rc(G) = k$ , para um  $k$  fixo,  $k \geq 2$  is NP-completo.

# Diâmetro

Seja  $ecc(v)$  a excentricidade de um vértice  $v \in G$ . O diâmetro do grafo  $G$ ,  $diam(G)$ , é a maior excentricidade encontrada em  $G$ .

$$ecc(v_0) = 3$$

$$ecc(v_1) = 3$$

$$ecc(v_2) = 3$$

$$ecc(v_3) = 3$$

$$ecc(v_4) = 3$$

$$ecc(v_5) = 2$$

$$ecc(v_6) = 4$$

$$ecc(v_7) = 3$$

$$ecc(v_8) = 4$$

Portanto,  $diam(G) = 4$ .

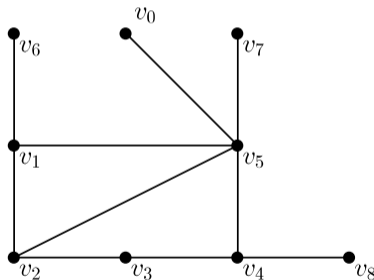


Figura: Grafo  $G$  com  $diam(G) = 4$ .



# Árvore Geradora

Uma árvore geradora em um grafo  $G$  é um subgrafo com todos os vértices de  $G$  que não contém ciclos.

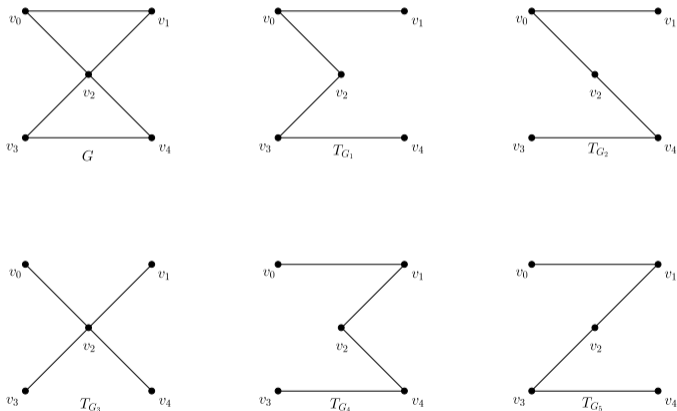


Figura: Grafo  $G$  e suas respectivas árvores geradoras.

## Coloração Arco-íris em um Grafo $G$

Para obter uma coloração arco-íris em qualquer grafo simples e conexo  $G$ , é suficiente atribuir cores distintas para todas as arestas de uma de suas árvores geradoras.

- $rc(G) \leq |V(G)| - 1$ .

# Limitantes Superior e Inferior

Seja  $G$  um grafo simples e conexo com  $n$  vértices.

Limitantes (CHARTRAND et al., 2008)

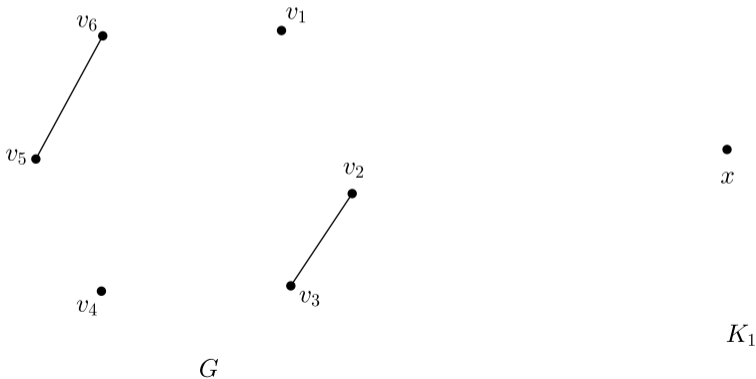
$$\text{diam}(G) \leq rc(G) \leq n - 1$$

# Grafos Junção $K_1$

Dados dois grafos  $G$  e  $H$ , o grafo junção  $G + H$  tem conjunto de vértices

$V(G + H) = V(G) \cup V(H)$  e conjunto de arestas

$E(G + H) = \{vu : v \in V(G) \text{ e } u \in V(H)\} \cup E(G) \cup E(H).$

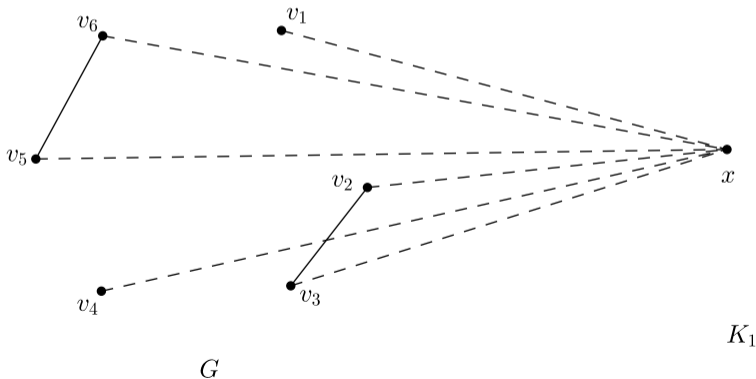


# Grafos Junção $K_1$

Dados dois grafos  $G$  e  $H$ , o grafo junção  $G + H$  tem conjunto de vértices

$V(G + H) = V(G) \cup V(H)$  e conjunto de arestas

$E(G + H) = \{vu : v \in V(G) \text{ e } u \in V(H)\} \cup E(G) \cup E(H).$

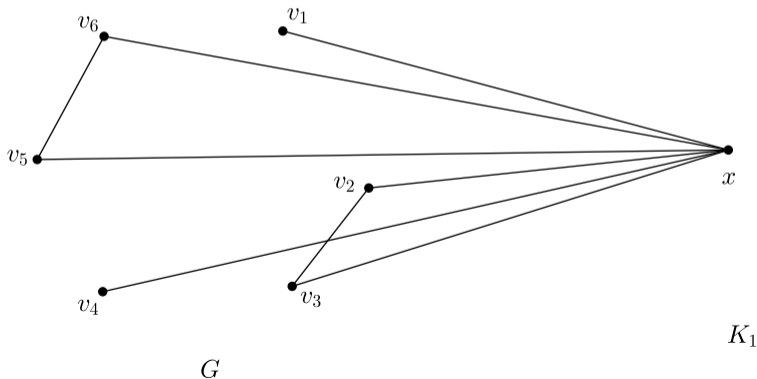


# Grafos Junção $K_1$

Dados dois grafos  $G$  e  $H$ , o grafo junção  $G + H$  tem conjunto de vértices

$V(G + H) = V(G) \cup V(H)$  e conjunto de arestas

$E(G + H) = \{vu : v \in V(G) \text{ e } u \in V(H)\} \cup E(G) \cup E(H)$ .



# Número de Conexão Arco-íris das Árvores

Teorema (CHARTRAND et al., 2008)

Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices. O número de conexão arco-íris,  $rc(G) = n - 1$  se, e somente se,  $G$  é uma árvore.

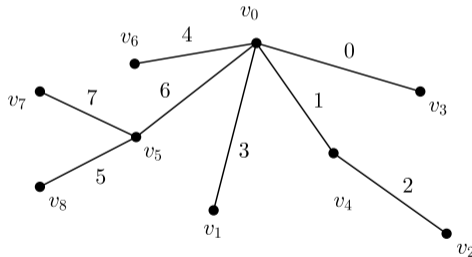


Figura: Uma árvore  $G$  com 8 arestas e uma coloração arco-íris.

# Número de Conexão Arco-íris dos Grafos Completos

Teorema (CHARTRAND et al., 2008)

O  $rc(G) = 1$  se, e somente se,  $G$  é um grafo completo.

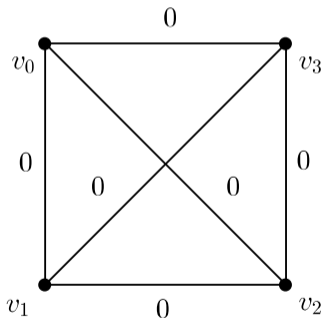


Figura: Grafo  $K_4$  arestas e uma coloração arco-íris.



# Número de Conexão Arco-íris dos Ciclos

Teorema (CHARTRAND et al., 2008)

Se  $C_n$  é um ciclo com  $n$  vértices, então  $rc(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

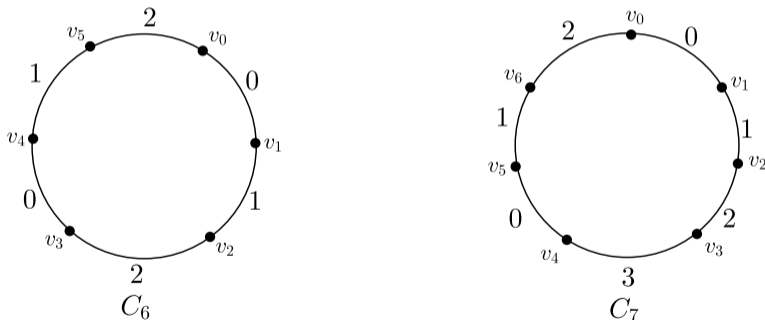


Figura: Ciclos  $C_6$  e  $C_7$  com uma coloração arco-íris.

# Número de Conexão Arco-íris das Rodas

Um grafo roda,  $W_n$ , consiste da junção de um ciclo  $C_n = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v_0, n \geq 3$  com um grafo  $K_1$ . Seja  $V(K_1) = \{x\}$ .

**Teorema (CHARTRAND et al., 2008)**

Se  $W_n$  é um ciclo com  $n$  vértices, tal que  $n \geq 3$ , então

$$rc(W_n) \begin{cases} = 1, & \text{se } n = 3; \\ = 2, & \text{se } 4 \leq n \leq 6; \\ = 3, & \text{se } n \geq 7. \end{cases}$$

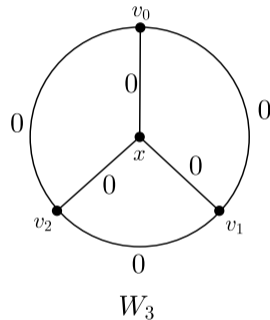


Figura: Roda  $W_3$  com uma coloração arco-íris.

# Número de Conexão Arco-íris das Rodas

Um grafo roda,  $W_n$ , consiste da junção de um ciclo  $C_n = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v_0$ ,  $n \geq 3$  com um grafo  $K_1$ . Seja  $V(K_1) = \{x\}$ .

**Teorema (CHARTRAND et al., 2008)**

Se  $W_n$  é um ciclo com  $n$  vértices, tal que  $n \geq 3$ , então

$$rc(W_n) \begin{cases} = 1, & \text{se } n = 3; \\ = 2, & \text{se } 4 \leq n \leq 6; \\ = 3, & \text{se } n \geq 7. \end{cases}$$

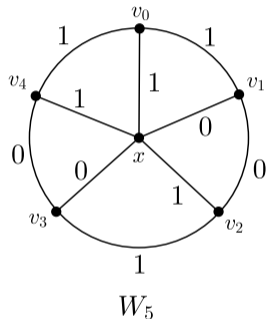


Figura: Roda  $W_5$  com uma coloração arco-íris.

# Número de Conexão Arco-íris das Rodas

Um grafo roda,  $W_n$ , consiste da junção de um ciclo  $C_n = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v_0, n \geq 3$  com um grafo  $K_1$ . Seja  $V(K_1) = \{x\}$ .

**Teorema (CHARTRAND et al., 2008)**

Se  $W_n$  é um ciclo com  $n$  vértices, tal que  $n \geq 3$ , então

$$rc(W_n) \begin{cases} = 1, & \text{se } n = 3; \\ = 2, & \text{se } 4 \leq n \leq 6; \\ = 3, & \text{se } n \geq 7. \end{cases}$$

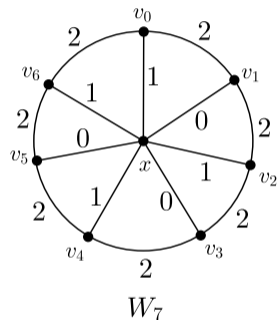


Figura: Roda  $W_7$  com uma coloração arco-íris.

# Número de Conexão Arco-íris dos Leques

Um grafo *leque*,  $F_n$ , consiste da junção de um grafo caminho  $P_n = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ ,  $n \geq 2$  com um grafo  $K_1$ . Seja  $V(K_1) = \{x\}$ .

**Teorema (SY; MEDIKA; YULIANTI, 2013)**

Seja  $F_n$  um grafo leque.

$$rc(F_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 2, \\ 2, & \text{se } 3 \leq n \leq 6, \\ 3, & \text{se } n \geq 7. \end{cases}$$

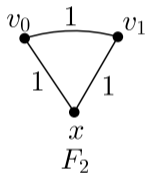


Figura: Leque  $F_2$  com uma coloração arco-íris.

# Número de Conexão Arco-íris dos Leques

Um grafo *leque*,  $F_n$ , consiste da junção de um grafo caminho  $P_n = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ ,  $n \geq 2$  com um grafo  $K_1$ . Seja  $V(K_1) = \{x\}$ .

**Teorema (SY; MEDIKA; YULIANTI, 2013)**

Seja  $F_n$  um grafo leque.

$$rc(F_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 2, \\ 2, & \text{se } 3 \leq n \leq 6, \\ 3, & \text{se } n \geq 7. \end{cases}$$

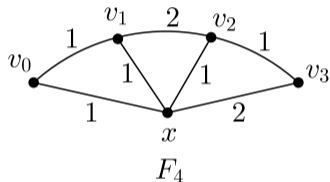


Figura: Leque  $F_4$  com uma coloração arco-íris.

# Número de Conexão Arco-íris dos Leques

Um grafo *leque*,  $F_n$ , consiste da junção de um grafo caminho  $P_n = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ ,  $n \geq 2$  com um grafo  $K_1$ . Seja  $V(K_1) = \{x\}$ .

**Teorema (SY; MEDIKA; YULIANTI, 2013)**

Seja  $F_n$  um grafo leque.

$$rc(F_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 2, \\ 2, & \text{se } 3 \leq n \leq 6, \\ 3, & \text{se } n \geq 7. \end{cases}$$

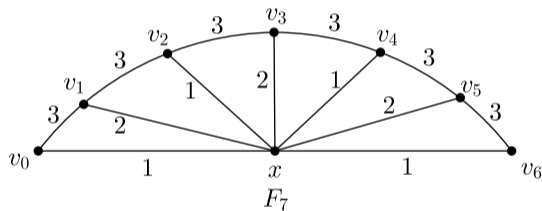


Figura: Leque  $F_7$  com uma coloração arco-íris.

## Definição de Produto Cartesiano

O produto cartesiano de dois grafos,  $G$  e  $H$ , é um grafo com o conjunto de vértices  $V(G) \times V(H)$  e arestas,  $(v_i, u_j)$  e  $(v_k, u_l)$ , se e somente se  $(v_i, v_k) \in E(G)$  e  $u_j = u_l$  ou se  $(u_j, u_l) \in E(H)$  e  $v_i = v_k$ .

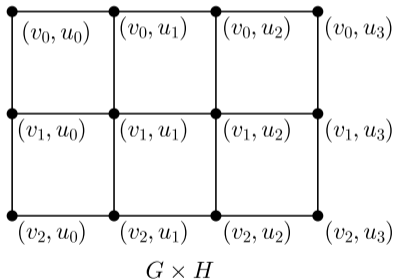


Figura: Grafo  $G \times H$ .



# Exemplo de Produto Cartesiano

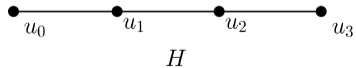
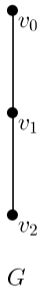


Figura: Grafos  $G$  e  $H$ .

# Exemplo de Produto Cartesiano

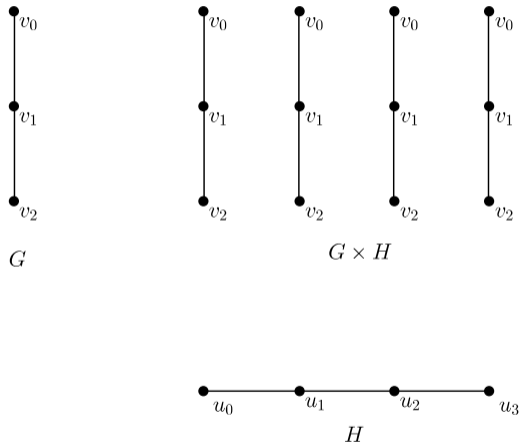


Figura:  $|V(H)|$  cópias de  $G$ .

# Exemplo de Produto Cartesiano

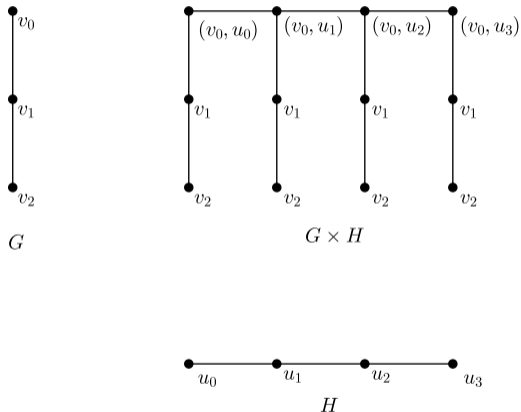


Figura: Primeira cópia de  $H$ .

# Exemplo de Produto Cartesiano

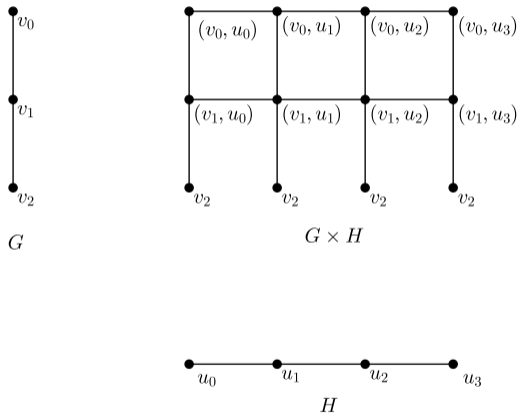


Figura: Segunda cópia de  $H$ .

# Exemplo de Produto Cartesiano

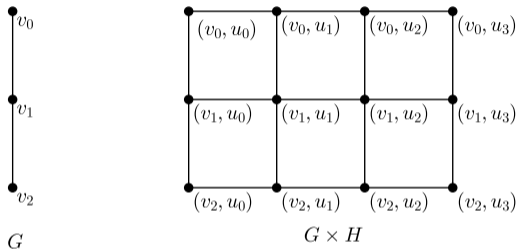


Figura: Grafo  $G \times H$ .

# Coloração Arco-íris em Produto Cartesiano

Teorema (LI; SUN, 2010)

Seja  $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k$ ,  $k \geq 2$ , tal que  $G_i$  é conexo,  $1 \leq i \leq k$ . Então  $rc(G) \leq \sum_1^k rc(G_i)$ . Além disso, se  $diam(G_i) = rc(G_i)$  para todo  $G_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , então  $rc(G) = \sum_1^k rc(G_i)$ .

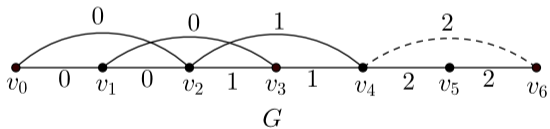
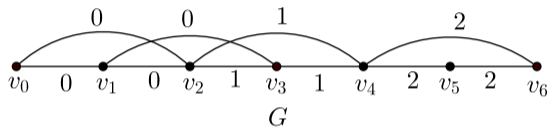
**Conclusão:**

- $rc(P_m \times P_n) = m + n - 2$  para dois caminhos  $P_m$  e  $P_n$  tal que  $2 \leq m \leq n$ ;
- $rc(P_m \times C_n) = m - 1 + \frac{n}{2}$  para um caminho  $P_m$  e um ciclo  $C_n$  com  $m \geq 3$  e  $n$  par,  $n \geq 3$ .

# Criticalidade Arco-íris

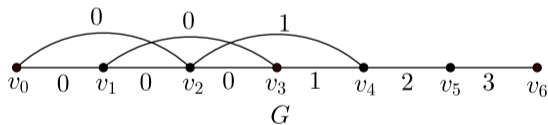
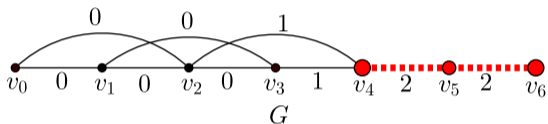
Um grafo  $G$  é arco-íris crítico se ao remover uma aresta qualquer de  $G$ , o número de conexão arco-íris de  $G$  aumenta (RAO; MURALI, 2014).

# Criticalidade Arco-íris

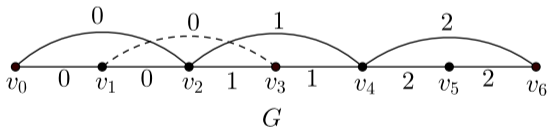
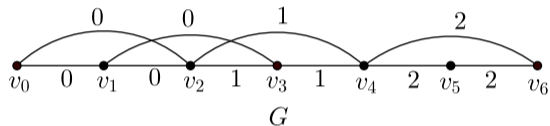




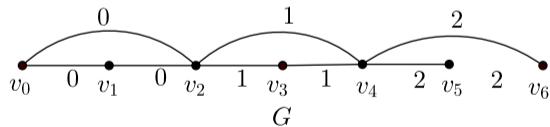
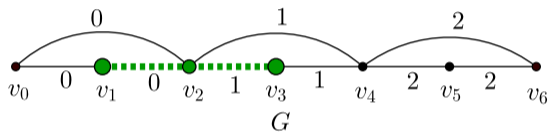
# Criticalidade Arco-íris



# Criticalidade Arco-íris



# Criticalidade Arco-íris



## Grafos Arco-íris Críticos

Os ciclos são grafos arco-íris críticos. Observe que ao removermos uma aresta  $e$  de um ciclo  $C_n$ ,  $n \geq 3$ , o grafo  $C_n - e$  torna-se um caminho  $P_n$ . Portanto, podemos concluir que:

- $rc(C_n) = \lceil n/2 \rceil < rc(C_n - e) = n - 1$ .

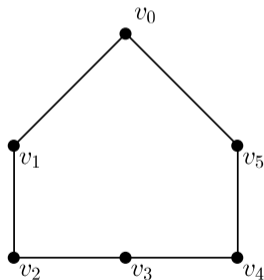


Figura: (a) Ciclo  $C_6$ .

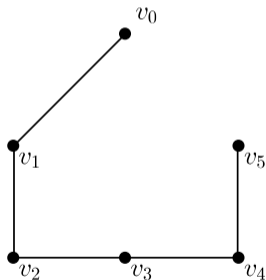


Figura: (b) Ciclo  $C_6 - e$ .

# Grafos Arco-íris Críticos

Teorema (RAO; MURALI, 2014)

O grafo  $P_m \times P_n$ ,  $m \geq 2$  e  $n \geq 2$ , é arco-íris crítico.

# Grafos Arco-íris Críticos

Teorema (RAO; MURALI, 2014)

O grafo  $P_m \times P_n$ ,  $m \geq 2$  e  $n \geq 2$ , é arco-íris crítico.

**Refutado posteriormente por...**

Teorema (ROCHA; ALMEIDA, 2017)

O grafo  $P_m \times P_n$  é arco-íris crítico se, e somente se, é um caminho ou um ciclo  $C_4$ .

# Grafos Arco-íris Críticos

Teorema (RAO; MURALI, 2014)

O grafo  $C_m \times P_n$ ,  $m \geq 3$  par e  $n \geq 2$ , é arco-íris crítico.

# Grafos Arco-íris Críticos

Teorema (RAO; MURALI, 2014)

O grafo  $C_m \times P_n$ ,  $m \geq 3$  par e  $n \geq 2$ , é arco-íris crítico.

**Refutado posteriormente por...**

Teorema (ROCHA; ALMEIDA, 2017)

O grafo  $C_m \times P_n$ ,  $m$  inteiro par,  $m \geq 4$  e  $n \geq 2$ , não é arco-íris crítico.



# Resultados

Teorema (ROCHA; ALMEIDA, 2019★)

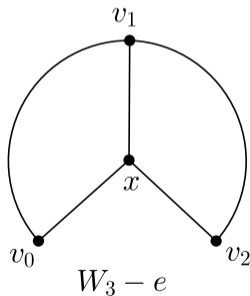
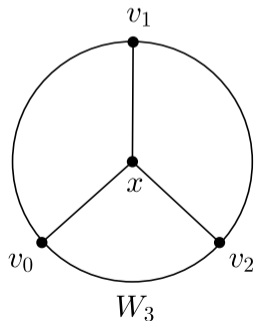
O grafo  $W_n$  é arco-íris crítico se e somente se  $n = 3$ .

# Resultados

Teorema (ROCHA; ALMEIDA, 2019★)

O grafo  $W_n$  é arco-íris crítico se e somente se  $n = 3$ .

Quando  $n = 3$ .

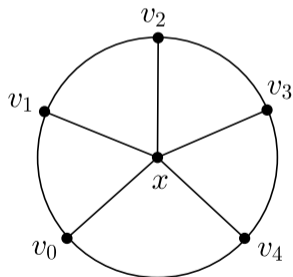


# Resultados

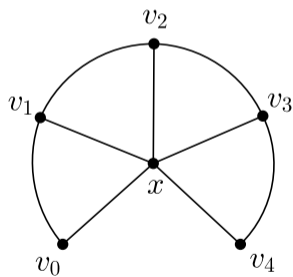
Teorema (ROCHA; ALMEIDA, 2019★)

O grafo  $W_n$  é arco-íris crítico se e somente se  $n = 3$ .

Quando  $4 \leq n \leq 6$ ,  $rc(W_n) = rc(W_n - e) = rc(F_n) = 2$ .



$W_5$



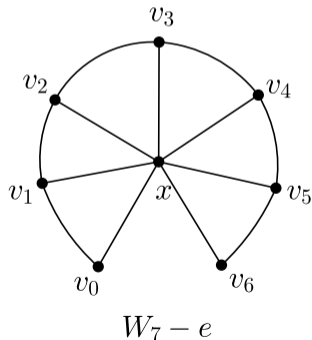
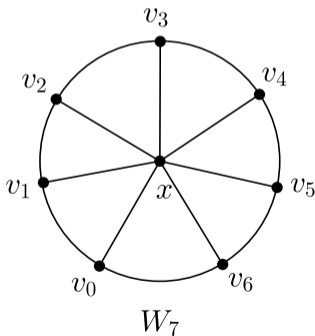
$W_5 - e$

# Resultados

Teorema (ROCHA; ALMEIDA, 2019★)

O grafo  $W_n$  é arco-íris crítico se e somente se  $n = 3$ .

Quando  $n \geq 7$ ,  $rc(W_n) = rc(W_n - e) = rc(F_n) = 3$ .

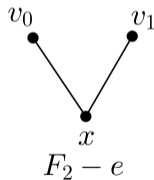
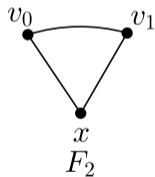


# Resultados

Teorema (ROCHA; ALMEIDA, 2019★)

O grafo  $F_n$  é arco-íris crítico se e somente se  $n = 2$ .

Quando  $n = 2$ .

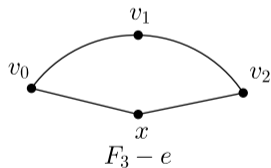
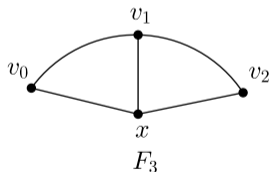


# Resultados

Teorema (ROCHA; ALMEIDA, 2019★)

O grafo  $F_n$  é arco-íris crítico se e somente se  $n = 2$ .

Quando  $n = 3$ ,  $rc(F_n - e) = rc(C_n) = 2$ .

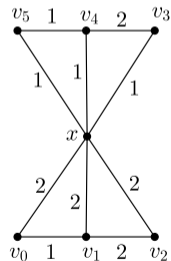
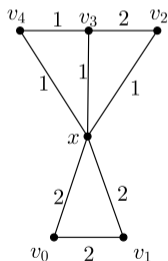
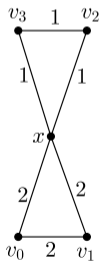


# Resultados

Teorema (ROCHA; ALMEIDA, 2019★)

O grafo  $F_n$  é arco-íris crítico se e somente se  $n = 2$ .

Quando  $4 \leq n \leq 6$ ,  $rc(F_n - e) = rc(F_n) = 2$ .

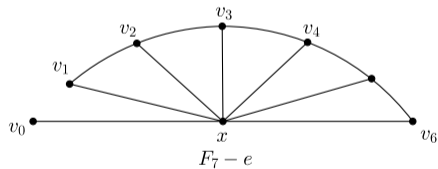
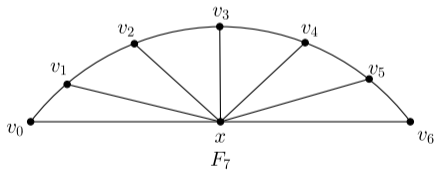


# Resultados

Teorema (ROCHA; ALMEIDA, 2019★)

O grafo  $F_n$  é arco-íris crítico se e somente se  $n = 2$ .

Quando  $n = 7$ ,  $rc(F_n - e) = rc(F_n) = 3$ .



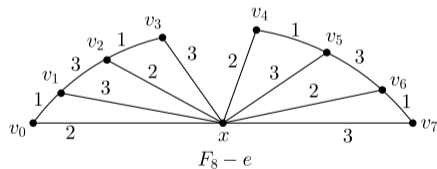
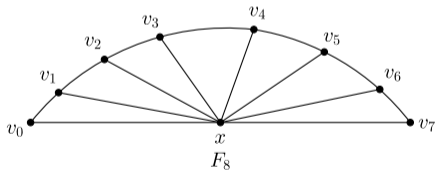


# Resultados

Teorema (ROCHA; ALMEIDA, 2019★)

O grafo  $F_n$  é arco-íris crítico se e somente se  $n = 2$ .

Quando  $n \geq 8$ ,  $rc(F_n - e) = rc(F_n) = 3$ .

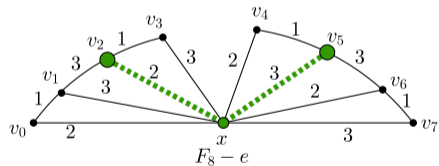
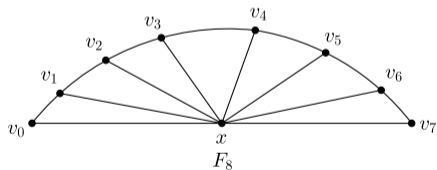


# Resultados

Teorema (ROCHA; ALMEIDA, 2019★)

O grafo  $F_n$  é arco-íris crítico se e somente se  $n = 2$ .

Quando  $n \geq 8$ ,  $rc(F_n - e) = rc(F_n) = 3$ .

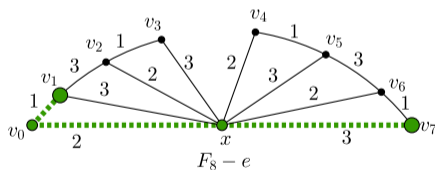
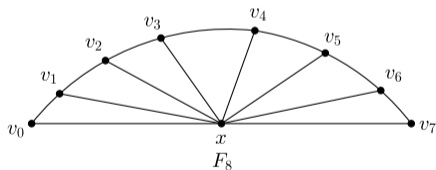


# Resultados

Teorema (ROCHA; ALMEIDA, 2019★)

O grafo  $F_n$  é arco-íris crítico se e somente se  $n = 2$ .

Quando  $n \geq 8$ ,  $rc(F_n - e) = rc(F_n) = 3$ .

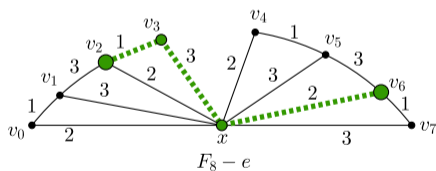
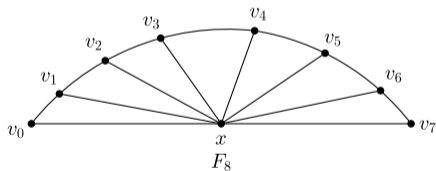


# Resultados

Teorema (ROCHA; ALMEIDA, 2019★)

O grafo  $F_n$  é arco-íris crítico se e somente se  $n = 2$ .

Quando  $n \geq 8$ ,  $rc(F_n - e) = rc(F_n) = 3$ .



## Conclusões e Trabalhos Futuros

É interessante observar que, mesmo os ciclos e os caminhos sendo grafos arco-íris críticos, os grafos  $P_n + K_1$  com  $n \geq 3$  e  $C_n + K_1$  com  $n \geq 4$  não são arco-íris críticos.

Seja  $G$  um grafo simples, conexo com  $n$  vértices,  $n \geq 3$ . Quando o grafo  $G + K_1$  é arco-íris crítico?

Sabe-se que se  $G$  é completo, então  $G + K_1$  é arco-íris crítico.

## Conclusões e Trabalhos Futuros

Um caminho hamiltoniano em um grafo  $G$  é um caminho que contém todos os vértices de  $G$ . Note que se  $G$  tem um caminho hamiltoniano, então  $G + K_1$  tem um leque  $F_{|V(G)|}$  como subgrafo e  $rc(G + K_1) \leq 3$ .

Pode-se concluir que se  $G$  tem um caminho hamiltoniano e  $rc(G + K_1) = 3$ , então  $|V(G)| \geq 7$  e  $G + K_1$  não é arco-íris crítico pelo teorema da criticalidade arco-íris em grafos leque.

## Conclusões e Trabalhos Futuros

Se  $G$  tem caminho hamiltoniano e  $rc(G) = 2$ , então  $rc(G + K_1) = 2$ , basta manter a mesma coloração arco-íris nas arestas do grafo  $G$  e reutilizar uma das duas cores para colorir as arestas da junção. É possível remover uma aresta  $e$  e manter uma coloração arco-íris em  $G + K_1$  utilizando  $rc(G + K_1)$  cores.

Como trabalhos futuros sugere-se o estudo da criticalidade arco-íris de grafos junção  $G + K_1$  nos casos em que  $G$  tem um caminho hamiltoniano (ou seja,  $G + K_1$  tem um leque como subgrafo),  $rc(G) = 3$  e  $rc(G + K_1) = 2$ .

# Bolsa de Fomento



Setembro de 2018 a Agosto de 2019







# Obrigado!


Aleffer Rocha


[aleffer@alunos.utfpr.edu.br](mailto:aleffer@alunos.utfpr.edu.br)

## Referências I





 ANANTH, P.; NASRE, M.; SARPATWAR, K. K. Rainbow connectivity: Hardness and tractability. In: CHAKRABORTY, S.; KUMAR, A. (Ed.). *IARCS Annual Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science (FSTTCS 2011)*. Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2011. (Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), v. 13), p. 241–251.

 CHAKRABORTY, S. et al. Hardness and algorithms for rainbow connectivity. *Journal of Combinatorial Optimization*, v. 21, p. 330–347, 2011.

 CHARTRAND, G. et al. Rainbow connection in graphs. *Mathematica Bohemica*, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic, v. 133, n. 1, p. 85–98, 2008.

 LI, S.; LI, X. Note on the complexity of deciding the rainbow connectedness for bipartite graphs. *arXiv preprint arXiv:1109.5534*, 2011.

## Referências II

-  LI, X.; SUN, Y. Characterize graphs with rainbow connection number  $m-2$  and rainbow connection numbers of some graph operations. *Preprint*, 2010.
-  RAO, K. S.; MURALI, R. Rainbow critical graphs. *International Journal of Computer Application*, v. 4, n. 4, p. 252–259, 2014.
-  ROCHA, A.; ALMEIDA, S. M. Criticalidade arco-íris dos grafos resultantes de produto cartesiano de ciclos e caminhos. In: *Anais do II Workshop de Pesquisa em Computação dos Campos Gerais*. Ponta Grossa, PR: [s.n.], 2017.
-  SY, S.; MEDIKA, G. H.; YULIANTI, L. The rainbow connection of fan and sun. *Applied Mathematical Sciences*, v. 7, n. 64, p. 3155–3159, 2013.