Coloração total distinta na vizinhança em grafos 4-partidos completos

Matheus Scaketti
Orientadora: Profª. Dra. Sheila Morais de Almeida

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

4 de outubro de 2017

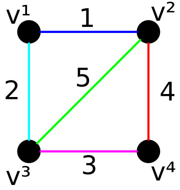
Coloração em grafos

Coloração de Arestas

Consiste em atribuir cores as arestas de um grafo G.

Coloração de arestas própria

Quaisquer duas arestas adjacentes têm cores diferentes.



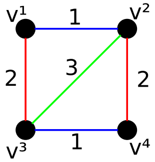
Coloração de Arestas

O Problema da Coloração de Arestas

Encontrar o menor número de cores possível que faça uma coloração de arestas própria de G. Chamado de índice cromático, denotado por $\chi'(G)$.

Grau máximo

É o maior grau entre os vértices de um grafo G. Denotado por $\Delta(G)$.



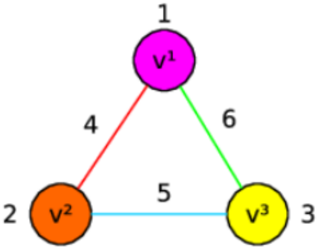
$$\chi'(G) = \Delta(G) = 3$$

Coloração Total

Consiste em atribuir cores para as arestas e os vértices de um grafo G.

Coloração total própria

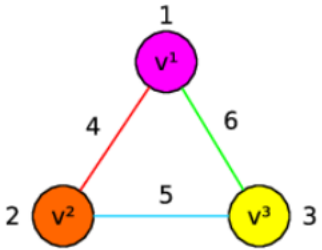
Quaisquer dois elementos adjacentes têm cores diferentes.



Coloração Total

O Problema da Coloração total

Encontrar o menor número de cores possível que faça uma coloração total própria de G. Chamado de número cromático total, denotado por $\chi''(G)$.



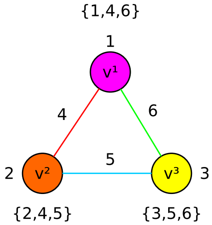
Coloração total distinta na vizinhança

Conjuntos de cores

Composto pelas cores de um vértice e das arestas adjacentes a ele.

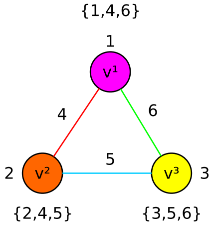
Coloração TDV

É uma coloração total própria onde o conjunto de cores de todo par de vértices adjacentes é distinto.



O Problema da Coloração TDV

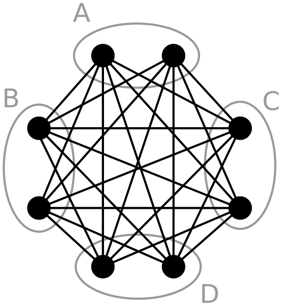
Encontrar o menor número de cores possível que faça uma coloração total distinta na vizinhança de G. Chamado de número cromático TDV, denotado por $\chi''_a(G)$.



Grafos k-partidos completos

Grafos k-partidos completos

Os grafos k-partidos completos são aqueles cujo conjunto de vértices pode ser particionado em k conjuntos independentes.



Resultados Anteriores

Resultados Anteriores

Conjectura (Zhang *et al.*, 2005)[6]

Se G é um grafo simples, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 3$.

Teorema (Zhang *et al.*, 2005)[6]

Se G é um grafo com vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi''_a(G) \geq \Delta(G) + 2$

Bipartidos e Tripartidos completos

Bipartidos Completos (Zhang *et al.*, 2005) [6]

Seja $K_{m,n}$ um grafo bipartido completo, então $\chi''_a(K_{m,n}) = \Delta(K_{m,n}) + 1$ quando $n \neq m$, e $\chi''_a(K_{m,n}) = \Delta(K_{m,n}) + 2$, quando $n = m \neq 1$.

Tripartidos Completos (Tiburcio, 2016) [2]

Se G é um grafo tripartido completo não isomorfo ao K_3, então $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 1$ se, e somente se, G não possui vértices adjacentes de grau máximo. Caso contrário, $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$

Grafos 4-partidos completos

Divisão do Problema

Considerando um grafo G 4-partido completo com partição $\{A, B, C, D\}$.

Caso 1

Se $|A| = |B| = |C| = |D|$, então $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$.

Caso 2

Se $|A| = |B| = |C| = |D| - 1$, então $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$.

Caso 3

Se $|A| = |B| = |C| < |D| - 1$ com ordem par, então $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$

Caso 4

Se $|A| = |B| = |C| < |D| - 1$ com ordem ímpar, então $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$

Divisão do Problema

Caso 5

Se $|A| = |B| < |C| \leq |D|$, então $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$.

Caso 6

Se $|A| < |B| = |C| = |D|$, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Caso 7

Se $|A| < |B| = |C| < |D|$, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Caso 8

Se $|A| < |B| < |C| = |D|$, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Caso 9

Se $|A| < |B| < |C| < |D|$, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Divisão do Problema

Caso 1

Se $|A| = |B| = |C| = |D|$, então $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$.

Teorema (Luiz, 2014) [1]

Seja G um grafo k-equipartido completo, com $k \geq 2$ e partes de tamanho $r \geq 2$. Se rk é par, então $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$. Se rk é ímpar, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 3$.

Caso 8

Se $|A| < |B| < |C| < |D|$, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.

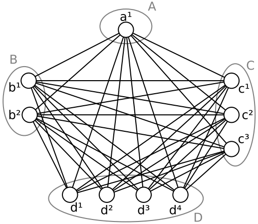
Divisão do Problema

Teorema (Yap, 1989) [4]

Se G é um grafo k-partido completo, então $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$.

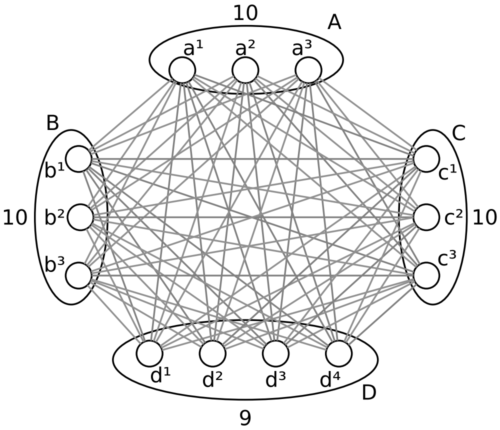
Teorema (Scaketti; Almeida, 2017)

Se G é um grafo k-partido completo tal que as cardinalidades de quaisquer dois conjuntos da partição são duas a duas distintas, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.



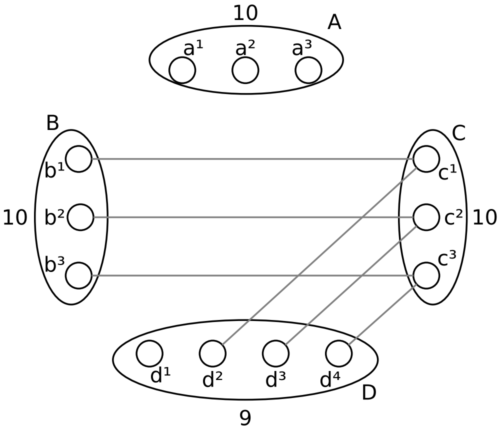
$|A| = |B| = |C| = |D| - 1$

Se $|A| = |B| = |C| = |D| - 1$, então $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$.

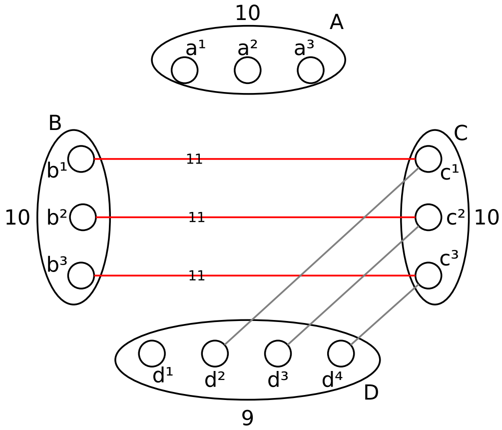


$|A| = |B| = |C| = |D| - 1$

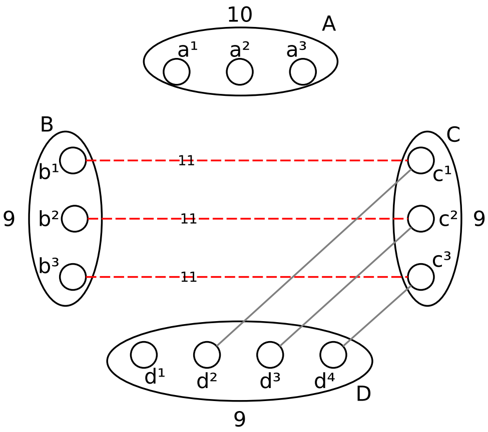
Se $|A| = |B| = |C| = |D| - 1$, então $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$.



Faça um emparelhamento perfeito M_{BC} e pinte com cor $\Delta(G) + 1$.



Remova as arestas do emparelhamento M_{BC}.



Prova

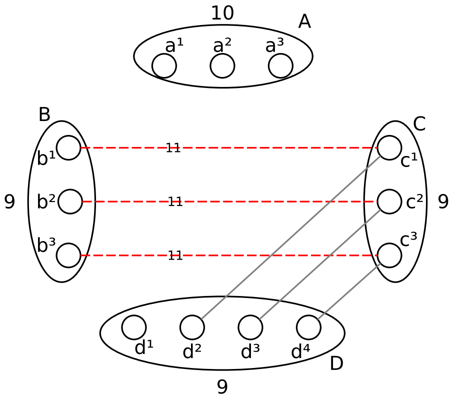
Núcleo de um grafo

O núcleo de um grafo G é o conjunto de vértices com grau máximo em G.

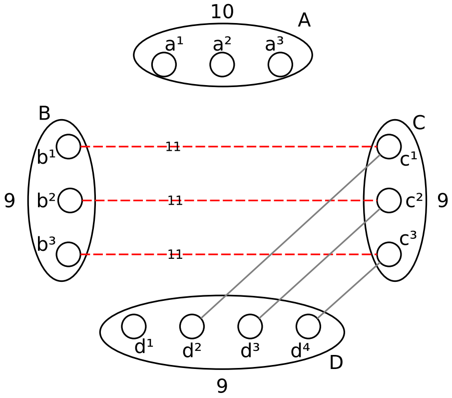
Teorema (Vizing, 1965) [3]

Seja G um grafo simples. Se o núcleo de G é um conjunto independente, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

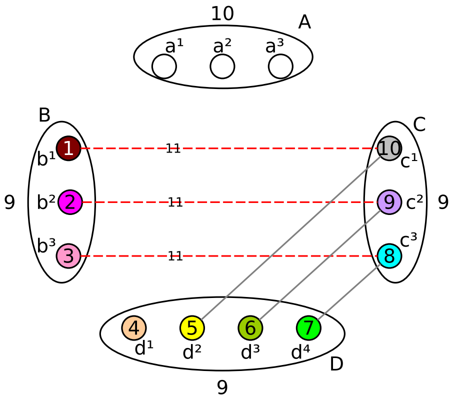
Pelo Teorema de Vizing, então podemos fazer uma coloração de arestas com $\Delta(G)$ cores.



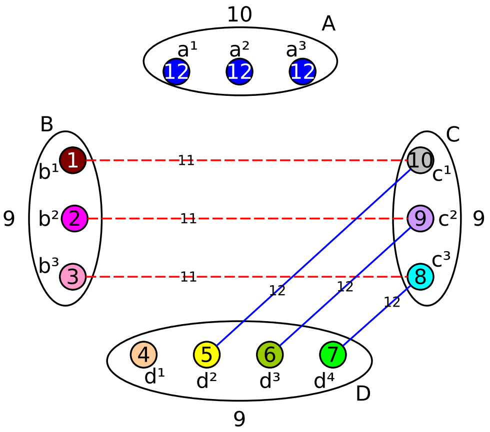
Como o número de vértices é ímpar, em qualquer coloração de arestas de $G - M_{BC}$, cada cor incide em no máximo $|V(G)| - 1$ vértices.



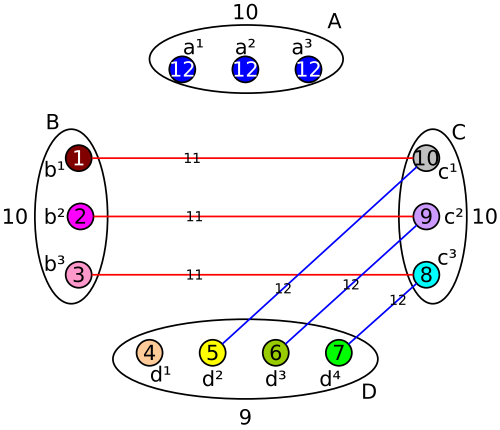
Pinte os vértices de B, C e D com as cores que sobrarem.



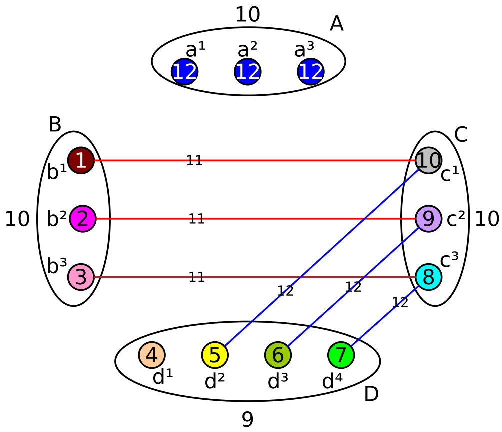
Faça um emparelhamento maximal M_{CD} e pinte as arestas do emparelhamento e os vértices de A com a cor $\Delta(G) + 2$.



Insira as arestas do emparelhamento M_{BC}.



Essa é uma coloração TDV para o grafo G.



Conclusão

Corolário (Scaketti; Almeida, 2017)

Se G é um grafo 4-partido completo, então $\chi''_a \leq \Delta(G) + 2$.

Teorema (Scaketti; Almeida, 2017)

Se G é um grafo 4-partido completo com vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$.

Conjectura (Scaketti; Almeida, 2017)

Se G é um grafo k-partido completo não isomorfo ao grafo completo K_k, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Trabalhos futuros

- Tentar generalizar os resultados sobre coloração TDV para os grafos k-partidos completos.

A. G. Luiz.
Sobre a coloração total semiforte.
Master's thesis, Unicamp, 2014.

I. R. Tiburcio and S. M. Almeida.
Coloração total semiforte de grafos tripartidos completos, 2016.
Trabalho de Conclusão de Curso.

V. G. Vizing.
Critical graph with a given chromatic class.
Diskret. Analiz, (5):6–17, 1965.

H. P. Yap.
Total colourings of graphs.
Bulletin of the London Mathematical Society, 21(2):159–163, 1989.

H. P. Yap.
Total colourings of graphs.
Springer, 2006.

Z. Zhang.
On adjacent-vertex-distinguishing total coloring of graphs.
Sci China Ser A, 48(3):289, 2005.