Algoritmos de Varredura para Listagem de Bicliques Maximais em Modelos Bipartidos de Intervalos e Arco-Circulares

Edmilson Pereira da Cruz
Drª. Marina Groshaus
Profº. Drº. André Luiz Pires Guedes

Universidade Federal do Paraná

3 de outubro de 2017

Introdução

Introdução

- Um **modelo bipartido arco-circular** é uma tripla $(A, B, \mathbb{E})$ onde A e B são conjuntos finitos disjuntos entre si e $\mathbb{E}$ é uma ordenação total dos elementos de $\{0, 1\} \times (A \cup B)$.

Introdução

- Um **modelo bipartido arco-circular** é uma tripla $(A, B, \mathbb{E})$ onde A e B são conjuntos finitos disjuntos entre si e $\mathbb{E}$ é uma ordenação total dos elementos de $\{0, 1\} \times (A \cup B)$.
- Para um modelo bipartido arco-circular $M = (A, B, \mathbb{E})$, denotamos A, B e $\mathbb{E}$ de M por, respectivamente, $A(M)$, $B(M)$ e $\mathbb{E}(M)$.

Introdução

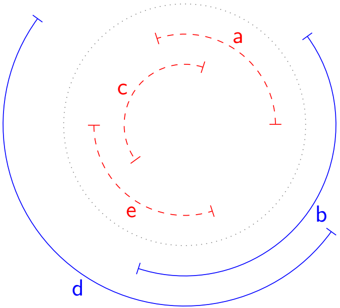
- Denotamos $(0, d)$ por s_d e chamamos de **"evento de início de d"**, para $d \in (A \cup B)$.
- Denotamos $(1, d)$ por f_d e chamamos de **"evento de fim de d"**, para $d \in (A \cup B)$.

Introdução

- Denotamos $(0, d)$ por s_d e chamamos de **"evento de início de** d**"**, para $d \in (A \cup B)$.
- Denotamos $(1, d)$ por f_d e chamamos de **"evento de fim de** d**"**, para $d \in (A \cup B)$.
- Um **modelo bipartido de intervalos** M é um modelo bipartido arco-circular onde todo s_d ocorre antes de f_d em $\mathbb{E}(M)$, para $d \in (A \cup B)$.

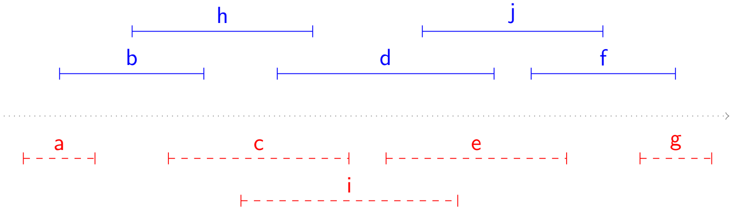
Introdução

Exemplo: $A(M) = \{b, d\}$, $B(M) = \{a, c, e\}$ e
$\mathbb{E}(M) = (s_a, f_b, s_c, f_a, s_d, s_e, f_c, s_b, f_e, f_d)$.



Introdução

Exemplo: $A(M) = \{b, d, f, h, j\}$, $B(M) = \{a, c, i, e, g\}$ e
$\mathbb{E}(M) = (s_a, s_b, f_a, s_h, s_c, f_b, s_i, s_d, f_h, f_c, s_e, s_j, f_i, f_d, s_f, f_e, f_j, s_g, f_f, f_g)$.



Introdução

Seja $G = (V, E)$ um grafo não-direcionado:

- Denotamos o conjunto de vértices de G por $V(G)$ e o conjunto de arestas por $E(G)$.

Introdução

Seja $G = (V, E)$ um grafo não-direcionado:

- Denotamos o conjunto de vértices de G por $V(G)$ e o conjunto de arestas por $E(G)$.
- O **grafo bi-arco-circular** é o grafo de intersecção de algum modelo bipartido arco-circular onde cada intervalo corresponde a um vértice e dois vértices compartilham uma aresta sse seus respectivos intervalos se intersectam e não são da mesma parte.

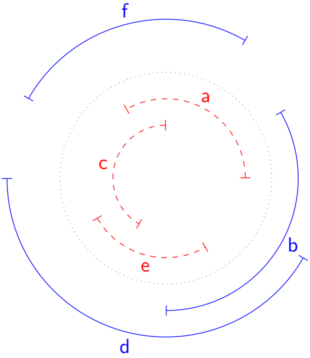
Introdução

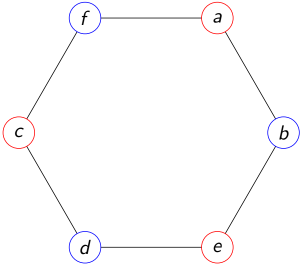
Seja $G = (V, E)$ um grafo não-direcionado:

- Denotamos o conjunto de vértices de G por $V(G)$ e o conjunto de arestas por $E(G)$.
- O **grafo bi-arco-circular** é o grafo de intersecção de algum modelo bipartido arco-circular onde cada intervalo corresponde a um vértice e dois vértices compartilham uma aresta sse seus respectivos intervalos se intersectam e não são da mesma parte.
- Se o modelo for bipartido de intervalos, então o grafo é um **grafo de bi-intervalos**.

Introdução

Exemplo: $A(M) = \{b, d, f\}$, $B(M) = \{a, c, e\}$ e
$\mathbb{E}(M) \;=\; (s_a, f_b, s_f, s_c, f_a, f_f, s_d, s_e, f_c, s_b, f_e, f_d)$.





Introdução

Sejam um grafo G e $S \subseteq V(G)$:

- Denotamos por $G[S]$ o **subgrafo induzido** de G por S.

Introdução

Sejam um grafo G e $S \subseteq V(G)$:

- Denotamos por $G[S]$ o **subgrafo induzido** de G por S.
- Se $G[S]$ é bipartido completo, dizemos que S é uma **biclique** de G.

Introdução

Sejam um grafo G e $S \subseteq V(G)$:

- Denotamos por $G[S]$ o **subgrafo induzido** de G por S.
- Se $G[S]$ é bipartido completo, dizemos que S é uma **biclique** de G.
- Se S é uma biclique e não existe um $v \in (V(G) \setminus S)$ tal que $G[S \cup \{v\}]$ é bipartido completo, então S é **maximal**.

Listagem de Bicliques Maximais

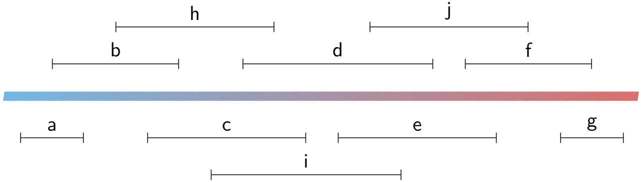
Listagem de Bicliques Maximais

- Limitante superior de bicliques maximais em bipartido é de $2^{n/2}$ [5];
- Alexe et al. [1], Dias, Figueiredo, Szwarcfiter [2], Makino e Uno [4] propõem algoritmos polinomais para listagem de bicliques maximais para certas classes de grafos;
- Eppstein apresenta um algoritmo linear quando parametrizado em função da arboricidade do grafo [3]; e
- Prisner encontra limitante superior de $(|A||B|)^2$ de bicliques maximais em grafos de bi-intervalos [5].

Algoritmo

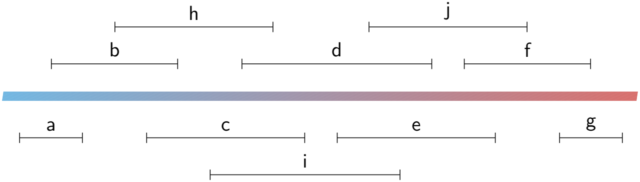
Algoritmo

Onde estão as bicliques maximais?



Algoritmo

Onde estão as bicliques maximais?



- Estratégia de varredura sobre os eventos de início e fim

Algoritmo

Algoritmo 1 Geração da lista de potenciais bicliques

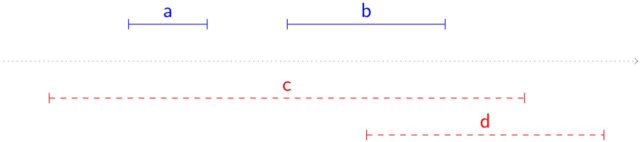
Entrada: Modelo bipartido de intervalos $(A, B, \mathbb{E})$

Saída: Lista de potenciais bicliques

```
Função BIVSWEEPLINE(A, B, 𝔼)
    Lista L
    INSERE(L, BICLIQUE_VAZIA())
    Para e ∈ 𝔼 :
        EventoTipo t ← TIPO_EVENTO(e)          ▷ "início" ou "fim"
        Intervalo i ← INTERVALO_EVENTO(e)
        Se i ∈ A então:
            p ← 1
        Senão                                  ▷ i ∈ B
            p ← −1
        Se t = "início" então:
            Para l ∈ L :
                Se PARTE_ABERTA(l, p) então:
                    INSERE_NA_PARTE(l, p, i)
        Senão                                  ▷ t = "fim"
            Para l ∈ L :
                Se i ∈ l[p] então:
                    k ← COPIA(l)
                    FECHA_PARTE(l, −p)          ▷ Parte contrária a p
                    REMOVE_DA_PARTE(k, p, i)
                    INSERE(L, k)
    Retorne L
```

Algoritmo

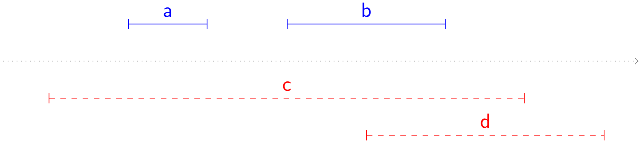
Exemplo: $\mathbb{E}(M) = (s_c, s_a, f_a, s_b, s_d, f_b, f_c, f_d)$



- (
- (

Algoritmo

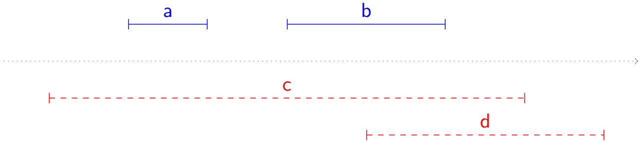
Exemplo: $\mathbb{E}(M) \; = \; (s_c, s_a, f_a, s_b, s_d, f_b, f_c, f_d)$



- (
- (c

Algoritmo

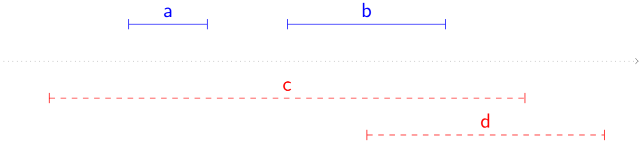
Exemplo: $\mathbb{E}(M) = (s_c, s_a, f_a, s_b, s_d, f_b, f_c, f_d)$



- (a
- (c

Algoritmo

Exemplo: $\mathbb{E}(M) = (s_c, s_a, f_a, s_b, s_d, f_b, f_c, f_d)$

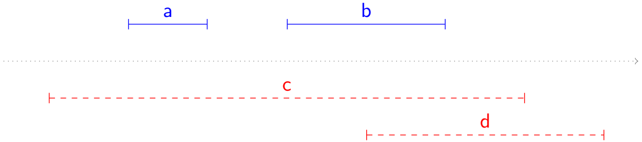


- (a
- (c)

- (
- (c

Algoritmo

Exemplo: $\mathbb{E}(M) = (s_c, s_a, f_a, s_b, s_d, f_b, f_c, f_d)$

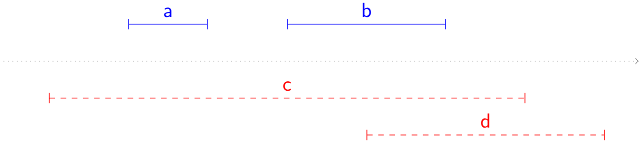


- (a,b
- (c)

- (b
- (c

Algoritmo

Exemplo: $\mathbb{E}(M) = (s_c, s_a, f_a, s_b, s_d, f_b, f_c, f_d)$

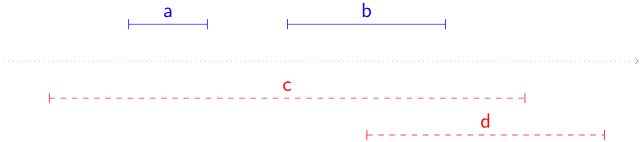


- (a,b
- (c)

- (b
- (c,d

Algoritmo

Exemplo: $\mathbb{E}(M) = (s_c, s_a, f_a, s_b, s_d, f_b, f_c, f_d)$



- (a,b
- (c)

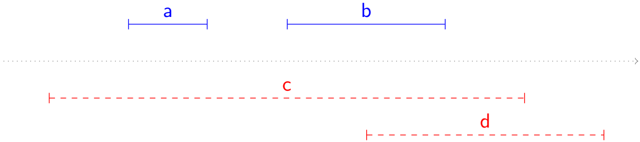
- (
- (c,d

- (b
- (c,d)

- (a
- (c)

Algoritmo

Exemplo: $\mathbb{E}(M) = (s_c, s_a, f_a, s_b, s_d, f_b, f_c, f_d)$



- (a,b)
- (c)

- ()
- (c,d

- (a
- ()

- (b)
- (c,d)

- (a,b
- ()

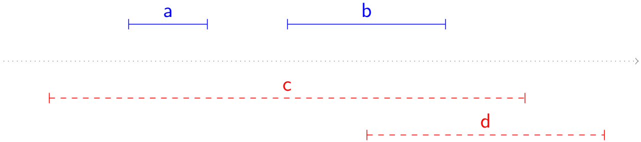
- (
- (d

- (a)
- (c)

- (b
- (d)

Algoritmo

Exemplo: $\mathbb{E}(M) = (s_c, s_a, f_a, s_b, s_d, f_b, f_c, f_d)$



- (a,b)
- (c)

- ()
- (c,d

- (a
- ()

- ()
- (c

- (b)
- (c,d)

- (a,b
- ()

- ()
- (d

- (b
- ()

- (a)
- (c)

- (b)
- (d)

- (b)
- (c)

- (
- (

Algoritmo

Algoritmo 2 Limpeza da lista de bicliques maximais

Entrada: Lista de potenciais bicliques L e número de intervalos $n = |A \cup B|$
Saída: Lista de bicliques maximais

Função $\textsc{Limpeza}(L, n)$
  $k \leftarrow |L|$
  Vetor $v_1[n] \leftarrow (0, \ldots, 0)$
  Vetor $v_2[k] \leftarrow (0, \ldots, 0)$
  Para $l_1 \in [1..k]$ e $v_2[l_1] = 0$ **:**
    Para $i \in L[l_1]$ **:**
      $v_1[i] \leftarrow 1$
    Para $l_2 \in [1..k]$ e $l_1 \neq l_2$ e $v_2[l_2] = 0$ **:**
      contida $\leftarrow 1$
      Para $i \in L[l_2]$ **:**
        Se $v_1[i] = 0$ **então:**
          contida $\leftarrow 0$
      Se contida $= 1$ **então:**
        $v_2[l_2] \leftarrow 1$
    Para $i \in L[l_1]$ **:**
      $v_1[i] \leftarrow 0$
  Lista L'
  Para $i \in k$ **:**
    Se $v_2[i] = 0$ **então:**
      $\textsc{Insere}(L', L[i])$
  Retorne L'

Corretude e Complexidade

Corretude e Complexidade

Invariante de Laço:

Theorem

Seja e_i *o evento contido na variável e do laço da linha 4 de* BIVSWEEPLINE *durante sua i-ésima iteração. Após a execução da i-ésima iteração, o algoritmo encontra todas bicliques maximais contidas no conjunto de todos intervalos que começam antes do último evento de fim de* $(e_1, \ldots, e_i)$.

PROVA.

Corretude e Complexidade

Invariante de Laço:

Theorem

Seja e_i o evento contido na variável e do laço da linha 4 de BIVSWEEPLINE *durante sua i-ésima iteração. Após a execução da i-ésima iteração, o algoritmo encontra todas bicliques maximais contidas no conjunto de todos intervalos que começam antes do último evento de fim de $(e_1, \ldots, e_i)$.*

PROVA. Muito longa para esta apresentação.

Corretude e Complexidade

Complexidade: ($n = |A \cup B|$ e $k = \#\text{potenciaisbicliques}$)

- Geração da lista de potenciais bicliques: $O(kn^2)$
- Limpeza da lista: $O(nk^2)$
- Total: $O(kn(k+n))$

Corretude e Complexidade

Complexidade: ($n = |A \cup B|$ e $k = \#\text{potenciaisbicliques}$)

- Geração da lista de potenciais bicliques: $O(kn^2)$
- Limpeza da lista: $O(nk^2)$
- Total: $O(kn(k+n))$

Talvez k seja exponencial a n...

Adaptação para o caso Bi-Arco-Circular

Adaptação para o caso Bi-Arco-Circular

Algoritmo 3 Geração da lista de potenciais bicliques adaptada para o caso bi-arco-circular

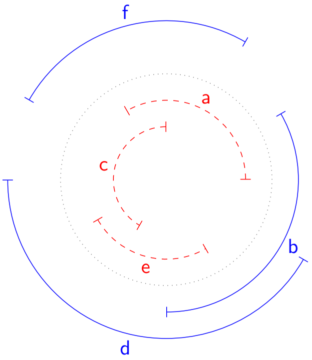
Entrada: Modelo bipartido arco-circular $(A, B, \mathbb{E})$
Saída: Lista de potenciais bicliques

1: **Função** $\textsc{BacSweepLine}(A, B, \mathbb{E})$
2: **Retorne** $\textsc{BivSweepLine}(A, B, \mathbb{E}\mathbb{E})$ ▷ Concatena $\mathbb{E}$ com $\mathbb{E}$

Adaptação para o caso Bi-Arco-Circular

Exemplo:

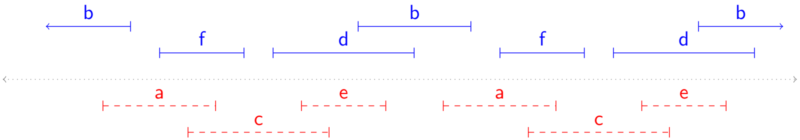
$$\mathbb{E} = (s_a, f_b, s_f, s_c, f_a, f_f, s_d, s_e, f_c, s_b, f_e, f_d)$$



Adaptação para o caso Bi-Arco-Circular

Exemplo:

$$\mathbb{EE} = (s_a, f_b, s_f, s_c, f_a, f_f, s_d, s_e, f_c, s_b, f_e, f_d,\\ s_a, f_b, s_f, s_c, f_a, f_f, s_d, s_e, f_c, s_b, f_e, f_d)$$



Adaptação para o caso Bi-Arco-Circular

Ainda não se sabe se a adaptação funciona!

Adaptação para o caso Bi-Arco-Circular

Ainda não se sabe se a adaptação funciona! A prova de corretude encontrada depende bastante do modelo ser de bi-intervalos.

Referências

Referências

Gabriela Alexe, Sorin Alexe, Yves Crama, Stephan Foldes, Peter L. Hammer, and Bruno Simeone.
Consensus algorithms for the generation of all maximal bicliques.
Discrete Applied Mathematics, 145(1):11 – 21, 2004.
Graph Optimization IV.

V. M. F. Dias, C. M. Herrera de Figueiredo, and J. L. Szwarcfiter.
On the generation of bicliques of a graph.
Discrete Applied Mathematics, 155(14):1826–1832, 2007.

David Eppstein.
Arboricity and bipartite subgraph listing algorithms.
Information processing letters, 51(4):207–211, 1994.

Referências

Kazuhisa Makino and Takeaki Uno.
New algorithms for enumerating all maximal cliques.
In *Scandinavian Workshop on Algorithm Theory*, pages 260–272. Springer, 2004.

Erich Prisner.
Bicliques in graphs I: Bounds on their number.
Combinatorica, 20(1):109–117, 2000.