Coloração de arestas distintas nos vértices adjacentes em potências de caminho

Mayara Midori Omai
Prof^{a}. Dra. Sheila Morais de Almeida
Prof^{a}. Dra. Diana Sasaki Nobrega

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

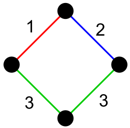
Setembro, 2016

Sumário

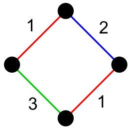
Coloração de arestas

Definição

Consiste na atribuição de cores para as arestas de um grafo de forma que arestas que incidem em um mesmo vértice possuem cores distintas.



Errado!

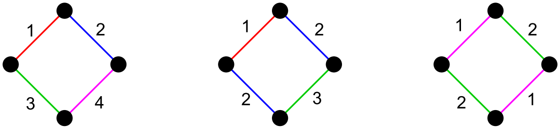


Correto!

Problema da coloração de arestas

Definição

Obter uma coloração de arestas utilizando a menor quantidade de cores possível.

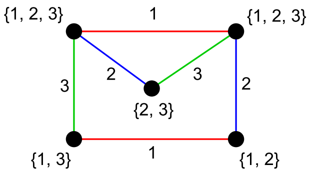


4 cores   3 cores   2 cores

Conjunto de cores de um vértice

Definição

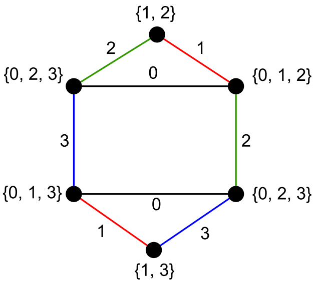
O conjunto de cores de um vértice é formado pelo conjunto de cores das arestas que incidem no mesmo.



Coloração de arestas distinta nos vértices adjacentes

Definição

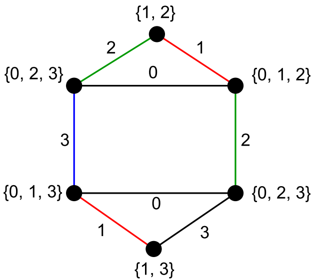
Consiste na atribuição de cores para as arestas de um grafo de forma que vértices adjacentes tenham conjuntos de cores distintos.



Problema da coloração de arestas DVA

Definição

Obter uma coloração de arestas distinta nos vértices adjacentes utilizando o menor número de cores possível. Tal número é chamado índice cromático distinto nos vértices adjacentes e denotado por $\chi'_a(G)$.

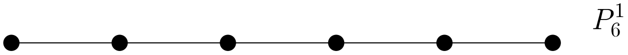


$\chi'_a(G) = 4$

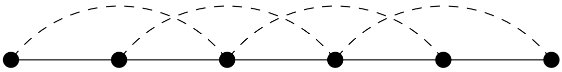
Potência de caminho

Definição

A k-ésima potência de um caminho, P_n^k, é um grafo caminho P_n com arestas entre cada par de vértices que estão a distância até k no P_n.

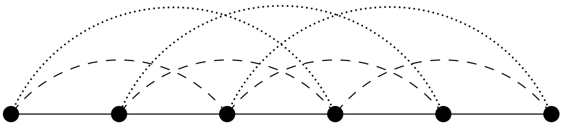


Potência de caminho



P_6^2

Potência de caminho

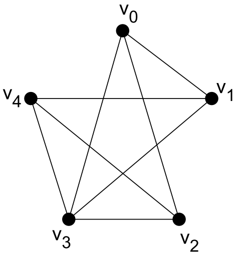


P_6^3

Grau de um vértice

Definição

O grau de um vértice v, denotado por $d(v)$, é o número de vizinhos de v no grafo. O grau máximo de G é o maior dos graus dos vértices de G, denotado por $\Delta(G)$.

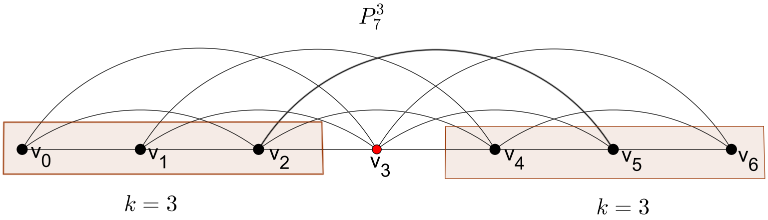


$$d(v_0) = 3$$
$$d(v_1) = 3$$
$$d(v_2) = 3$$
$$d(v_3) = 4$$
$$d(v_4) = 3$$

$$\Delta(G) = 4$$

Observações importantes

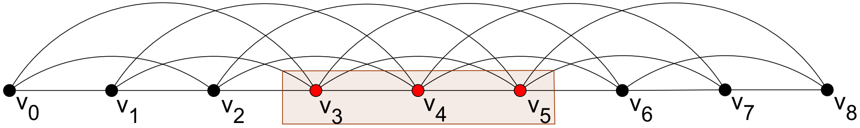
- Se um P_n^k têm $n \geqslant 2k+1$, então $\Delta(G) = 2k$.
- Em um P_n^k, $2k$ vértices tem grau menor que $2k$.



Objetivo

Apresentar a solução do Problema da Coloração de Arestas DVA para a k-ésima potência de caminho com $n \geqslant 3k$.

Note que quando $n > 2k + 1$ existem pelo menos dois vértices com grau $2k$ que são vizinhos.

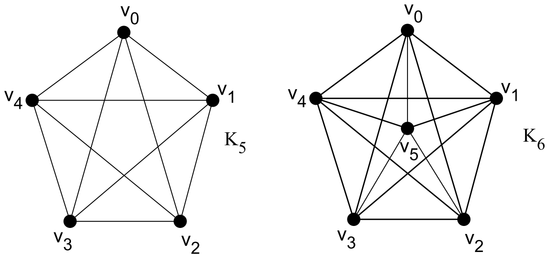


E, portanto, são necessárias pelo menos $\Delta(G) + 1$ cores para se obter uma coloração de arestas DVA.

Grafo completo

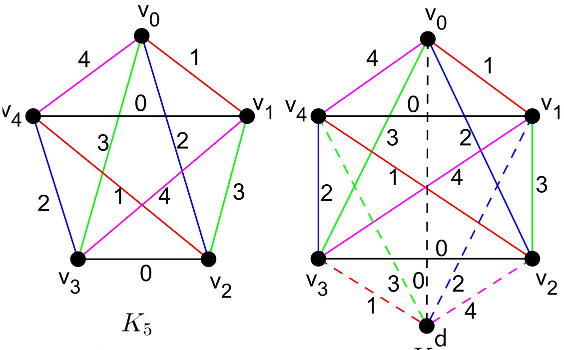
Definição

Um grafo é completo se existe aresta entre todos pares de vértices e denotado por K_n.



Coloração de aresta dos K_n

Para colorir as arestas de um K_n com n ímpar utiliza-se n cores. Caso contrário, utiliza-se $n - 1$ cores.



K_5

$\chi'(K_5) = 5$

K_6

$\chi'(K_6) = 5$

d $= \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Técnica *pullback*

Definição

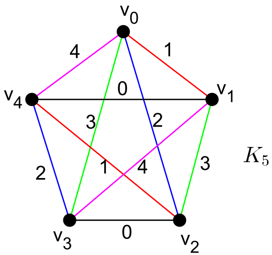
A técnica *pullback* consiste na apropriação de cores da coloração de arestas de um grafo completo.

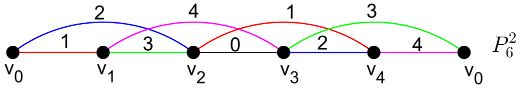
Nas potências de caminho com $n \geqslant 3k$, $\Delta(P_n^k)$ é par $(2k)$. Mas, como existem vértices adjacentes de grau máximo são necessárias $2k+1$ cores. Então, utilizamos a coloração de arestas dos grafos completos que utilizam $2k+1$ cores.

Técnica *pullback*

Definição

A técnica *pullback* consiste na apropriação de cores da coloração de arestas de um grafo completo.





1

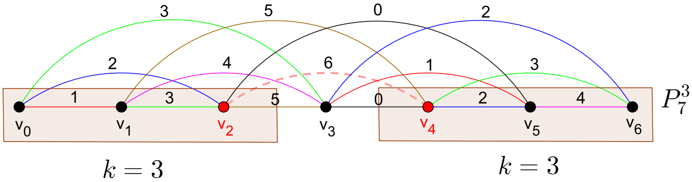
[1] *Pullback*: On edge-colouring indifference graphs e Total-chromatic number and chromatic index of dually chordal graphs.

Resultados

Lema

Seja G uma potência de caminho P_n^k. Se $n \geqslant 3k$, então não existem vértices v_l e v_r que são adjacentes e $d(v_l) = d(v_r) < \Delta(P_n^k)$.

- Se $n < 3k$:

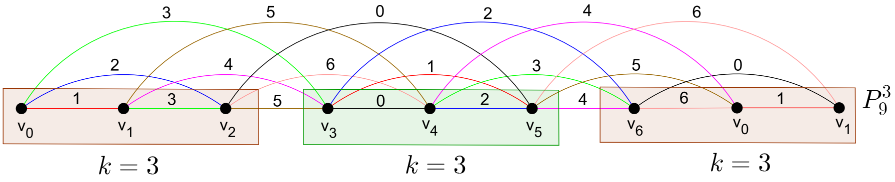


Resultados

Lema

Seja G uma potência de caminho P_n^k. Se $n \geqslant 3k$, então não existem vértices v_l e v_r que são adjacentes e $d(v_l) = d(v_r) < \Delta(P_n^k)$.

- Se $n \geqslant 3k$:



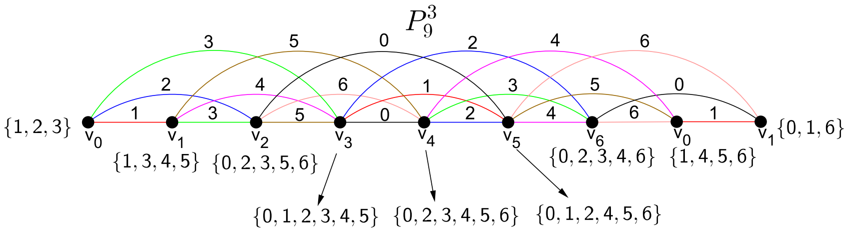
Resultados

Teorema

Se G é uma potência de caminho P_n^k com $n \geqslant 3k$, então $\chi'_a(G) = \Delta(G) + 1$.

Basta aplicar a técnica *pullback*, utilizando a coloração de um $K_\Delta(P_n^k) + 1$.

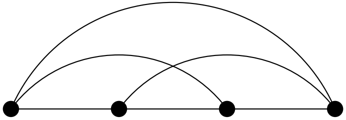
Exemplo


P_9^3
3
5
0
2
4
6
2
4
6
1
3
5
0
1
3
5
0
2
4
6
1
$\{1,2,3\}$
v0
v1
v2
v3
v4
v5
v6
v0
v1
$\{0,1,6\}$
$\{1,3,4,5\}$
$\{0,2,3,5,6\}$
$\{0,2,3,4,6\}$
$\{1,4,5,6\}$
$\{0,1,2,3,4,5\}$
$\{0,2,3,4,5,6\}$
$\{0,1,2,4,5,6\}$

Trabalhos futuros

- Resolver casos em que $k+1 < n < 3k$.

Note que os P_n^k com $n \leqslant k+1$, são isomorfos aos grafos completos e estes já foram resolvidos por Chartrand e Zhang (2008).



P_4^3

Obrigada ;)