Propriedades do Conjunto Dominante Mínimo no Produto Lexicográfico

FILIPE RODRIGUES PEREIRA DA SILVA
SHEILA MORAIS DE ALMEIDA

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

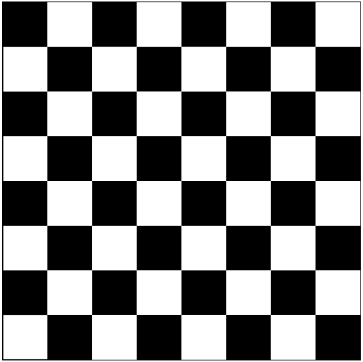
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE INFORMÁTICA

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

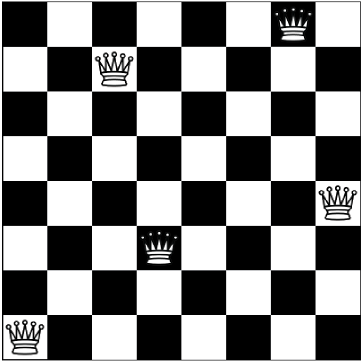
ORIGEM

Teve como motivação inicial o problema de determinar o número mínimo de rainhas que podem dominar todo um tabuleiro de xadrez.

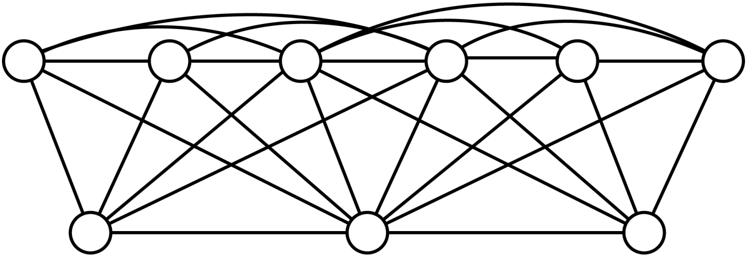
CONJUNTO DOMINANTE



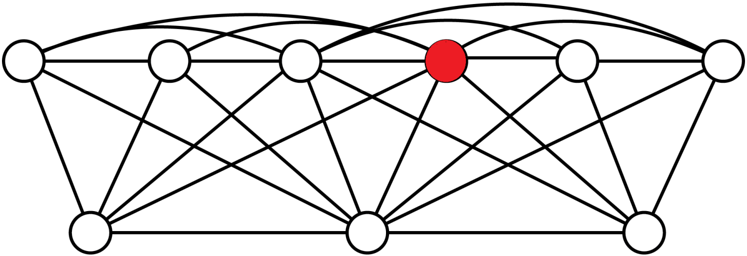
CONJUNTO DOMINANTE



CONJUNTO DOMINANTE



CONJUNTO DOMINANTE

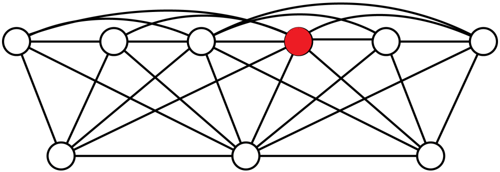


O QUE É O PROBLEMA DO CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO?

Dado um grafo, encontrar o menor conjunto de vértices D tal que todo vértice pertença a D ou seja vizinho de um vértice de D.

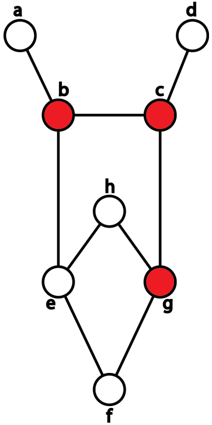
NOTAÇÃO

O tamanho do conjunto dominante mínimo é chamado de *número de dominação*, denotado por $\gamma(G)$.



$$\gamma(G) = 1$$

CONJUNTO DOMINANTE

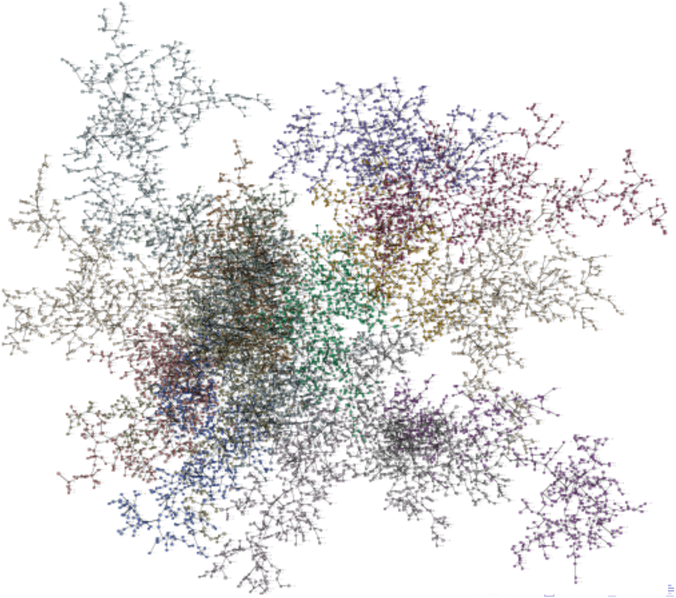


$$\gamma(G) = 3$$

MAS E SE UM GRAFO POSSUIR n VÉRTICES?

Não existe um algoritmo que consiga encontrar o Conjunto Dominante Mínimo de um grafo qualquer em tempo polinomial.

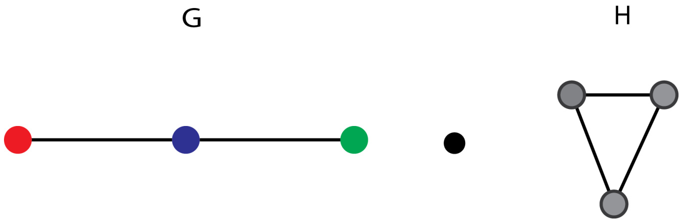
CONJUNTO DOMINANTE



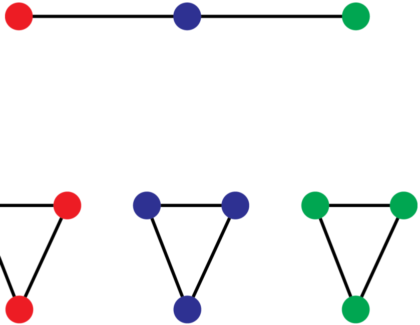
E QUANTO TEMPO ISSO LEVARIA?

Dependendo do grafo de entrada, um algoritmo por força bruta poderia levar mais de 500 bilhões de anos para obter uma resposta! Essa é uma das características dos problemas NP-completos.

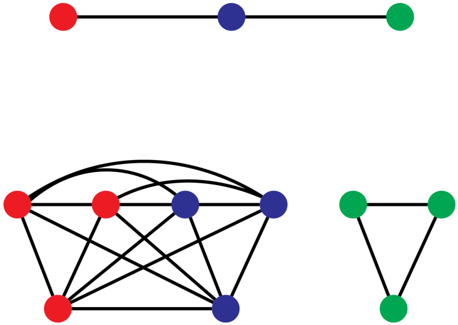
PRODUTO LEXICOGRÁFICO



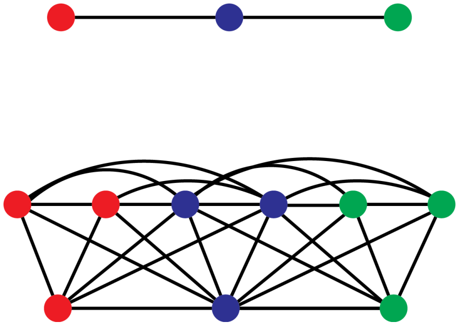
PRODUTO LEXICOGRÁFICO



PRODUTO LEXICOGRÁFICO



PRODUTO LEXICOGRÁFICO



PRODUTO LEXICOGRÁFICO

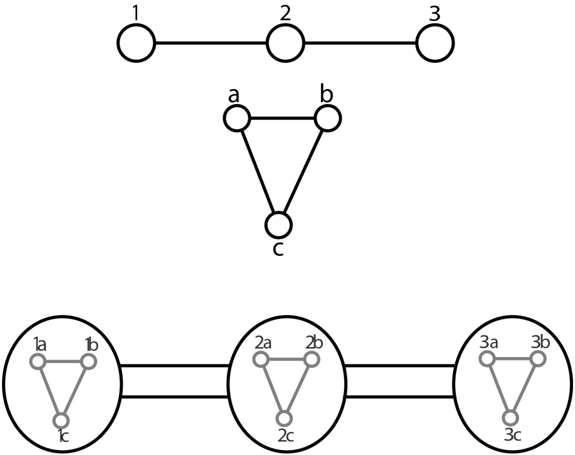


Figura: Grafos P_3, C_3 e representação gráfica do grafo $P_3 \bullet C_3$.

PRODUTO LEXICOGRÁFICO

FORMALIZANDO...

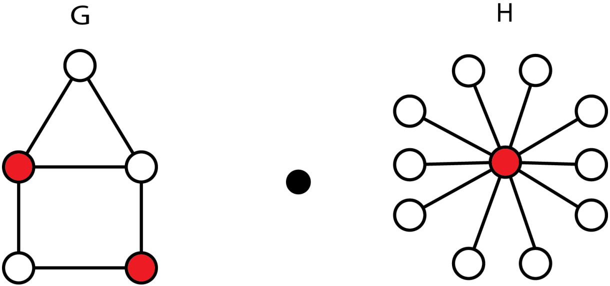
O produto lexicográfico de dois grafos G e H é denotado por $G \bullet H$, cujo conjunto de vértices é formado pelo produto dos conjuntos $V(G)$ e $V(H)$. Dois vértices (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são adjacentes em $G \bullet H$ se $x_1x_2 \in E(G)$, ou se $x_1 = x_2$ e $y_1y_2 \in E(H)$.

RESULTADOS

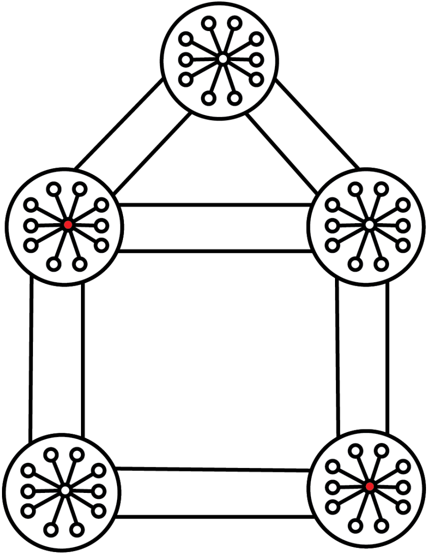
TEOREMA DE ZHANG (2011)

Zhang determinou que se G é um grafo simples e H é um grafo com $\gamma(H) = 1$, então $\gamma(G \bullet H) = \gamma(G)$.

RESULTADOS



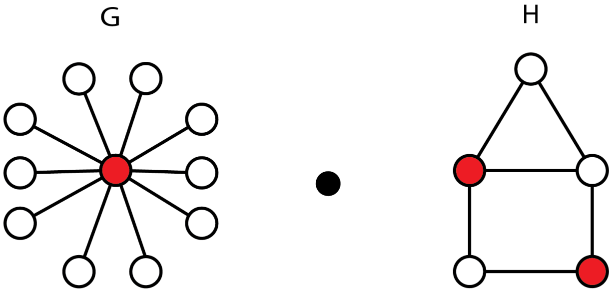
RESULTADOS



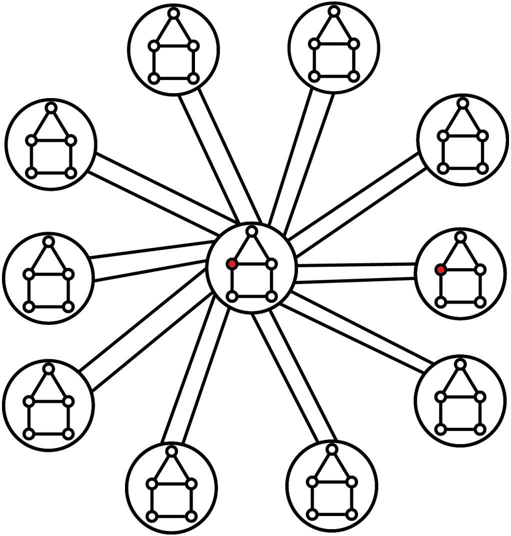
TEOREMA 1

Se G é um grafo com vértice universal de ordem pelo menos 2 e H um grafo simples com $\gamma(H) \geq 2$, então $\gamma(G \bullet H) = 2$.

RESULTADOS



RESULTADOS

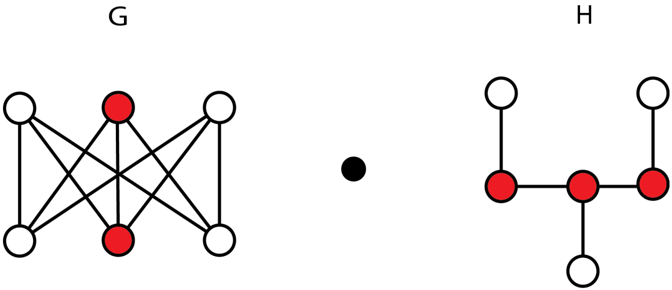


RESULTADOS

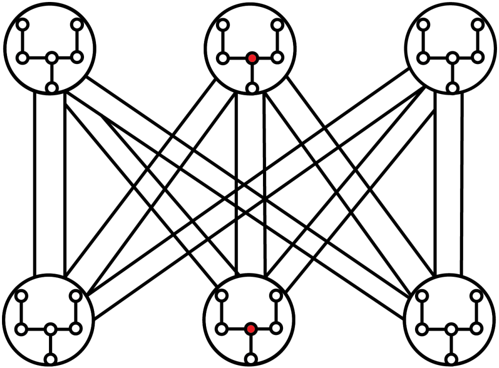
TEOREMA 2

Se G é um grafo k-partido completo, $k \geq 2$, e H um grafo simples sem vértice universal.

RESULTADOS



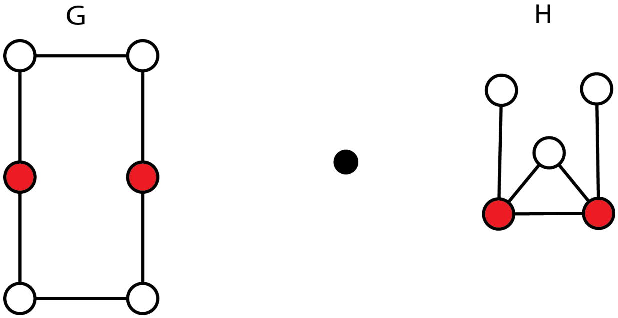
RESULTADOS



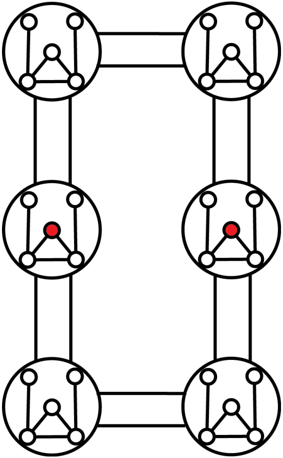
TEOREMA 3

Sejam G e H grafos simples e conexos, então $\gamma(G \bullet H) \leq 2\gamma(G)$.

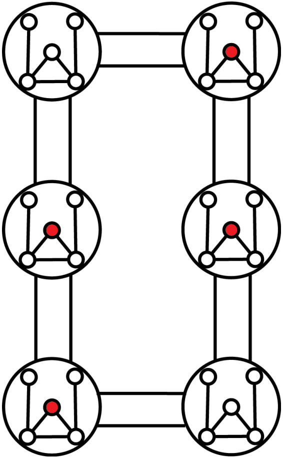
RESULTADOS



RESULTADOS



RESULTADOS



TRABALHOS FUTUROS

TRABALHOS FUTUROS

É interessante notar que quanto menos componentes de tamanho 1 houverem no subgrafo induzido pelo conjunto dominante mínimo de G, menor será a cardinalidade do conjunto dominante de $G \bullet H$ obtido pela técnica do Teorema 3. Observe que quando todo vértice do conjunto dominante mínimo $D \subseteq V(G)$ possui um vizinho em D, então $\gamma(G \bullet H) = \gamma(G)$. Considerando esta observação é interessante investigar nos trabalhos futuros quais os grafos que sempre possuem um conjunto dominante mínimo sem componentes de tamanho 1. Uma caracterização de tais grafos seria um resultado relevante.

REFERÊNCIAS

[1] B. Bresar;et.al. Vizing's conjecture: A survey and recent results. Journal of Graph Theory, 69(1):46–76, 2011.
[2] B. Hartnell and D. F. Rall. Domination in graphs, advanced topics. Marcel Dekker, Inc., 1998. Domination in cartesian products: Vizing's Conjecture (Chapter 7), 163–189.
[3] T. W. Haynes. Fundamentals of domination in graphs. Marcel Dekker, Inc., New York, 1 edition, 1998.
[4] D. S. J. Michael R. Garey. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. W. H. Freeman, 1 edition, 1979. p. 190, problem GT2.
[5] T. Sitthiwirattham. Domination on lexicographical product of cycles. Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS), 75(1):193–200, 2013.
[6] V. G. Vizing. Some unsolved problems in graph theory. Uspehi Nauk, 23 edition, 1968.
[7] J. L. X. Zhang and J. Meng. Domination in lexicographic product graphs. Ars Combin, 101(1):251–256, 2011.

DÚVIDAS?